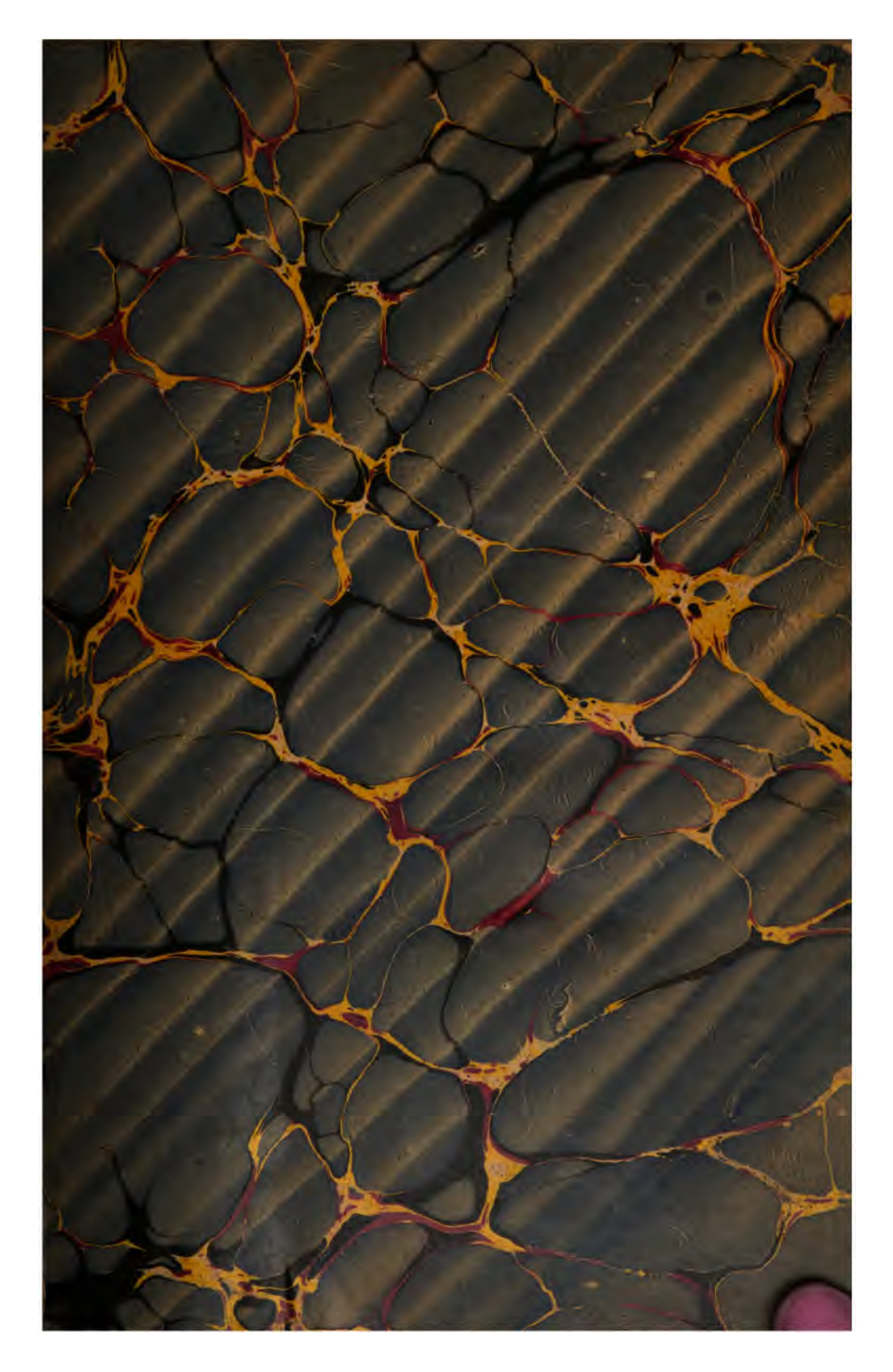

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

SPÉCIALES

A L'USAGE

DES CANDIDATS AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE, NORMALE ET CENTRALE

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME TROISIÈME

Année 1894.



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1894

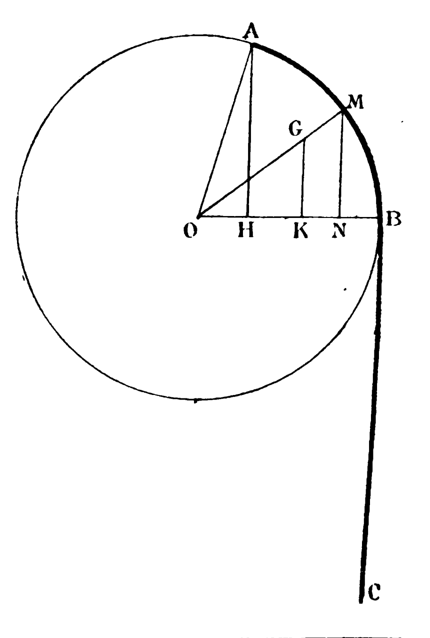
JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

DEUX EXERCICES DE MECANIQUE

par M. **Maurice d'Ocagne,** répétiteur à l'École Polytechnique.

I. — Problème de statique. — Équilibre de la montre au clou.

Un disque circulaire plein, homogène, de centre O, *qu'on peut supposer réduit à une épaisseur nulle, et dont le poids est* P, *est suspendu à un axe perpendiculaire à son plan et passant en un point* A *de sa circonférence, autour duquel il peut tourner librement. Un fil homogène, sans épaisseur, de poids* Q, *est également suspendu au point* A. *Il s'appuie librement sur la circonférence du disque* O. *Déterminer la position d'équilibre du système* (*).



Le fil s'appuie sur le disque depuis le point A jusqu'au point B, où la tangente au cercle est verticale; à partir de là il pend verticalement suivant BC.

Soient r le rayon du cercle, l la longueur totale du fil.

(*) Ce problème peut être considéré comme la limite théorique de celui qui consiste à déterminer la position d'équilibre d'une montre munie de chaîne, pendue à un clou; de là le nom de *problème de la montre au clou.*

Il y a équilibre lorsque la résultante : 1° du poids P du cercle, appliqué en O, 2° du poids $Q \times \dfrac{\text{arc AB}}{l}$ de la portion curviligne AB du fil, appliqué en G, 3° du poids $Q \times \dfrac{BC}{l}$ de la portion rectiligne du fil, dirigé suivant BC, passe par le point de suspension A.

On a donc, pour l'équation du problème

$$(1) \qquad P \times OH - Q \times \frac{\text{arc AB}}{l} \times HK - Q \times \frac{BC}{l} \times HB = 0.$$

Appelons ω l'angle BOA.

Nous avons

$$\begin{aligned} OH &= r \cos \omega, \\ \text{arc AB} &= r\omega, \\ BC &= l - r\omega, \\ HB &= r(1 - \cos \omega). \end{aligned}$$

Reste à évaluer HK. On a

$$HK = OK - OH.$$

Or d'après un théorème connu,

$$\frac{OK}{ON} = \frac{OG}{OM} = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}.$$

Donc

$$OK = r \cos \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = r \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\omega} = r \frac{\sin \omega}{\omega},$$

et

$$HK = r\left(\frac{\sin \omega}{\omega} - \cos \omega\right).$$

Par suite, l'équation (1) devient

$$Pr \cos \omega - Q.\frac{r\omega}{l} \cdot r\left(\frac{\sin \omega}{\omega} - \cos \omega\right)$$
$$- Q.\frac{l - r\omega}{l} \cdot r(1 - \cos \omega) = 0$$

ou, toutes réductions faites,

$$(2) \qquad (P + Q)l \cos \omega - Qr \sin \omega + Qr\omega - Ql = 0$$

Posant

$$\sqrt{(P + Q)^2 l^2 + Q^2 r^2} = \lambda,$$

Cette équation transcendante peut être résolue géométriquement. Il suffit de prendre le point de rencontre de la droite répondant à l'équation

$$y = \frac{Qr}{\lambda} z - \frac{Q(r\theta - l)}{\lambda}$$

avec la sinusoïde représentée par

$$y = \sin z.$$

Lorsque (ce qui est le cas pour la montre et sa chaîne) Q est assez petit, relativement à P, pour que, θ et ω étant tous deux voisins de $\frac{\pi}{2}$, le cube de leur différence soit négligeable, on peut substituer à l'équation (3) l'équation approchée obtenue en substituant z à $\sin z$, ce qui donne

$$z \doteq \frac{Q(r\theta - l)}{Qr - \lambda}.$$

Nous pouvons écrire

$$(P + Q)l = \lambda \sin \theta$$
$$Qr = \lambda \cos \theta,$$

et l'équation (2) devient

$$\lambda \sin (\theta - \omega) + Qr\omega - Ql = 0.$$

θ étant une constante connue, nous pouvons prendre pour inconnue $\theta - \omega = z$. L'équation devient alors

$$(3) \qquad \lambda \sin z - Qrz + Q(r\theta - l) = 0.$$

II. — Problème de Cinématique. — La Rencontre des Navires.

Le problème qui va être ici traité, en dehors du petit intérêt de curiosité qu'il peut avoir au point de vue de la navigation, présente l'avantage de fournir un bon exemple du secours que la représentation géométrique peut offrir pour la solution d'une question de mouvement dont l'étude purement analytique comporte des calculs relativement compliqués. Cette solution géométrique dispense, en outre, de recourir à la théorie des dérivées et permet, conséquemment, l'introduction du problème dans un cours élémentaire. C'est surtout sous ce rapport qu'il peut être recommandé comme exercice.

Voici l'énoncé du problème :

Un navire A, *animé d'une vitesse constante* α, *parcourt une*

ligne droite. Quand il se trouve au point A_0 *de sa route, un autre navire* B, *également animé d'une vitesse uniforme* β, *se trouve en un point* B_0 *extérieur à cette route. Quelle est, à partir de cet instant, la route que doit suivre le navire* B *pour rejoindre le plus vite possible le navire* A *ou, s'il ne peut l'atteindre, pour s'en rapprocher le plus possible?*

On suppose, bien entendu, les deux navires plongés dans une eau tranquille ou, du moins, entraînés tous deux par un même courant uniforme.

Remarquons tout d'abord que, par suite de la constance de sa vitesse, le navire B, pour réaliser la condition demandée, ne saurait décrire qu'une ligne droite. Cela posé, nous établirons d'abord un lemme.

Lemme. — Proposons-nous le problème suivant:

Deux mobiles A *et* B, *qui se trouvent à l'instant initial aux points* A_0 *et* B_0 *parcourent respectivement avec les vitesses initiales* α *et* β *les droites d'un plan. Déterminer en grandeur et position leur distance minimum.*

Soient A_0C et B_0C *(fig. 1)*, les droites parcourues par les points A et B, $A_0T = \alpha$ et $B_0U = \beta$ leurs vitesses.

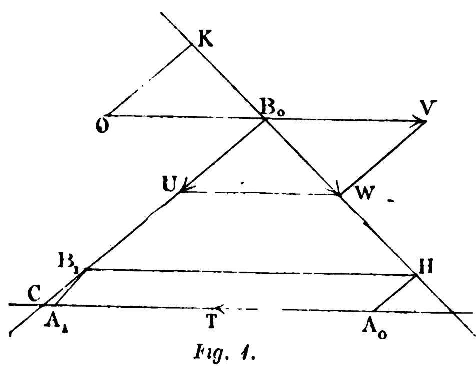


Fig. 1.

Si nous considérons le point A comme fixe, nous obtenons facilement la trajectoire *relative* du point B par rapport au point A. Il suffit de mener par B_0 le segment B_0V égal, parallèle et de sens contraire à A_0T et de le composer, en B_0W, avec B_0U.

La distance minimum des points A et B est donc donnée en grandeur et en direction par la perpendiculaire A_0H abaissée de A_0 sur B_0W. On obtient ensuite cette distance minimum

elle-même en menant, par le point H, la parallèle HB_1 à A_0C et tirant A_1B_1 parallèlement à A_0H.

Cette distance minimum est nulle si la droite B_0W passe par A_0, c'est-à-dire si les distances des points A_0 et B_0 au point C sont proportionnelles aux vitesses α et β, ce qui était évident *a priori.*

Remarquons enfin que, si par le point B, nous menons B_0O équipollent (*) à A_0T et OK équipollent à UB_0, le point K se trouve sur B_0W. C'est cette dernière construction qui va nous servir dans la suite.

Solution. — Soient A_0x la droite parcourue par le navire A à partir de sa position initiale A_0, B_0 la position initiale du navire B *(fig. 2)*.

Supposons qu'on fasse suivre au navire B la route rectiligne B_0C. D'après le lemme, la distance minimum des deux

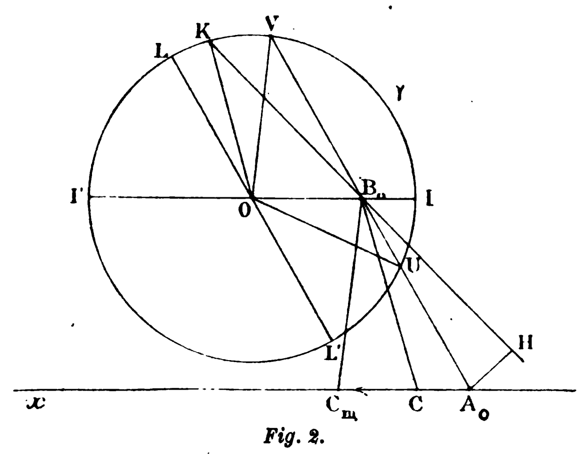


Fig. 2.

navires sera donnée par la distance A_0H du point A_0 à la droite B_0K telle que B_0O soit équipollent à la vitesse du navire A, et OK équipollent à celle du navire B changée de sens.

Lorsqu'on fait varier la direction B_0C, le point O reste fixe et le point K décrit une circonférence γ de centre O et de

(*) Égal, parallèle, de même sens.

rayon β. Il est facile, d'après cela, d'étudier les variations de la distance minimum A_0H.

Deux cas sont à considérer :

1° Si la droite A_0B_0 coupe la circonférence γ en deux points U et V, la distance minimum s'annule pour les deux directions de la droite B_0C parallèles aux rayons OU et OV. On a ainsi les deux routes qui permettent au navire B de rejoindre le navire A. Il y a lieu ici de faire une distinction.

Par le centre O, menons à A_0B_0 la parallèle LL'.

Si l'un des points U et V, U, par exemple se trouve sur l'arc L'I, la direction correspondante de B_0C_0 se réfère à une

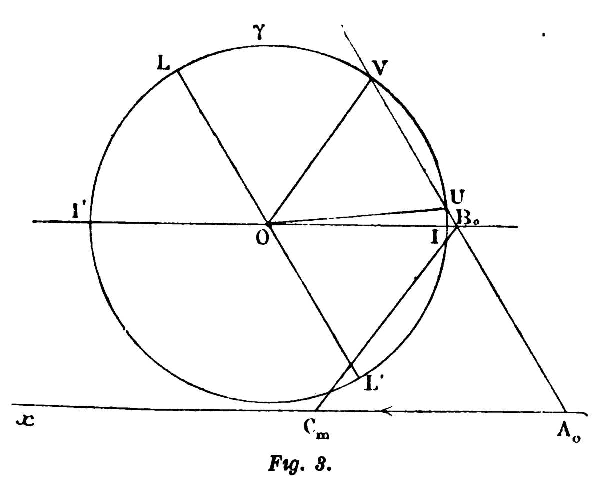


Fig. 3.

position du navire A, antérieure à la position initiale A_0; cette solution ne peut donc convenir, en fait; seule, la seconde, donnée par la parallèle B_0C_m à OV, convient.

Si les points U et V sont tous deux sur l'arc LI *(fig. 3)*, les deux solutions conviennent, mais comme celle qui correspond à la direction OV la plus voisine de la perpendiculaire élevée en O à OB_0 comporte une route B_0C_m plus courte, c'est celle-ci qu'il faut choisir.

Enfin, si les points U et V sont tous deux sur l'arc L'I *(fig.4)*, les directions correspondantes de B_0C se réfèrent à des positions du navire A antérieures à la position initiale A_0 ;

aucune des solutions ne convient. Il est *trop tard* pour que la rencontre puisse avoir lieu.

2° Si la droite A_0B_0 ne coupe pas γ (*fig. 5*), la distance

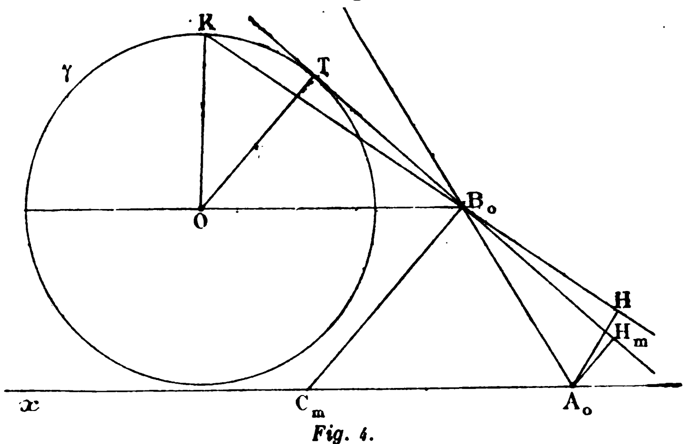


Fig. 4.

minimum A_0H ne peut pas s'annuler. La rencontre n'est pas possible. Mais cette distance minimum sera la plus petite possible lorsque la droite B_0H sera le moins inclinée sur la droite A_0B_0, c'est-à-dire lorsqu'elle se confondra avec la

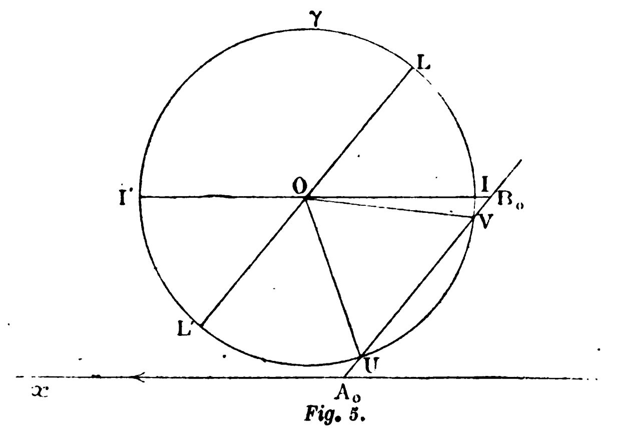


Fig. 5.

tangente B_0T menée de B_0 à la partie supérieure de γ.

La distance *minimum minimorum* des navires A et B est donc donnée par la distance A_0H_m du point A_0 à cette tangente.

On peut observer, puisque dans ce cas B_0C_m est parallèle à A_0H_m, c'est-à-dire qu'à l'instant de ce *minimum minimorum* le navire A coupe la route du navire B.

Telle est la réponse complète à la question posée.

Si, au lieu de supposer que le navire B quitte le point B_0 au moment où le navire A est en un point donné A_0 de sa route, on fait l'hypothèse que le navire B est libre de choisir l'instant de son départ, il devra, pour rejoindre le navire A après le moindre parcours, se mettre en marche lorsque la route B_0C_m correspondant à la rencontre sera perpendiculaire à A_0x, c'est-à-dire lorsque la droite A_0B_0 passera par le point où la partie supérieure du cercle γ est coupée par la perpendiculaire élevée en O à OB_0. L'angle B_0A_0x a alors pour tangente le rapport de la vitesse du navire B à celle du navire A, résultat évident *a priori* et que nous ne mentionnons ici qu'à titre de vérification.

SUR UNE APPLICATION DU CONE ISOTROPE
AUX QUADRIQUES

Par M. **S. Mangeot**, docteur ès sciences.

Je désigne par S une quadrique quelconque, et par Γ le cône conjugué du cône isotrope (sphère de rayon nul), par rapport à cette quadrique (*).

Si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de S, rapportée à des axes rectangulaires quelconques, et que l'on pose

$$4F(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2,$$

l'équation $F(x, y, z) = 0$ représente le cône du second ordre Γ.

Aux cinq formes réduites du polynôme $f(x, y, z)$ correspondent, pour $F(x, y, z)$, les cinq formes données par le tableau suivant:

(*) Γ est le lieu des diamètres de S qui sont conjugués des plans tangents au cône isotrope.

$f(x, y, z)$	$F(x, y, z)$
$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \text{const.},$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$
$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x,$	$\frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2} + 1,$
$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \text{const.},$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$
$\frac{y^2}{p} - 2x,$	$\frac{y^2}{p^2} + 1,$
$\frac{x^2}{a} + \text{const.}$	$\frac{x^2}{a^2}.$

On déduit de ce tableau les conséquences suivantes :

1° Lorsque le cône Γ se réduit à deux plans P, P′, la quadrique S est un cylindre à centres, ou un cylindre parabolique, ou enfin un système de deux plans parallèles, selon que les plans P, P′ sont sécants, parallèles ou confondus. Dans le cas contraire, soit Γ' le cône conjugué du cône isotrope par rapport à Γ : selon que Γ' est ou n'est pas formé de deux plans, la surface S est un paraboloïde ou une quadrique à centre unique.

De là un procédé pour reconnaître la classe à laquelle appartient une quadrique définie par son équation ordinaire.

2° Lorsque Γ, ou à défaut, Γ', est formé de deux plans, les bissectrices de ces deux plans sont des plans principaux de S.

De là une méthode pour trouver les plans principaux des quadriques qui n'appartiennent pas à la première classe.

3° Lorsque la quadrique S ne possède aucun centre à distance finie, les carrés de ses paramètres de grandeur sont égaux et de signes contraires aux carrés des demi-axes de la section droite de Γ, ici réduit à la forme cylindrique à centres.

On a là un moyen de calculer les paramètres principaux des paraboloïdes et cylindres paraboliques (*).

Celles, des conclusions précédentes, qui sont relatives aux

(*) On peut, par exemple, appliquer à Γ la méthode de la sphère bitangente, méthode qui, de ce fait, est susceptible de déterminer les dimensions de toutes les surfaces du second ordre.

cas où S est une surface cylindrique, donnent lieu à ces propositions :

Les axes d'une conique sont les bissectrices des deux diamètres de cette courbe qui sont conjugués des directions asymptotiques du cercle. Quand la conique est une parabole, le carré de la demi-distance de ces deux diamètres, changé de signe, donne le carré du paramètre de la parabole.

Nota. — Si, relativement à des axes de coordonnées faisant entre eux les angles λ, μ, ν, l'équation $f(x, y, z) = 0$ représente un paraboloïde (ou un cylindre parabolique) et que l'on pose

$$u = \sum \sin^2\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2\sum (\cos\mu \cos\nu - \cos\lambda)\,\frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial f}{\partial z},$$

l'axe du paraboloïde (ou le plan principal, proprement dit du cylindre) peut être représenté par les équations $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (ou par l'équation $\frac{u}{\partial x} = 0$).

Si $f(x, y) = 0$, est l'équation d'une parabole par rapport à deux axes de coordonnées faisant entre eux l'angle θ, l'axe de la parabole peut se représenter par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 - 2\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta\right] = 0,$$

et son paramètre est la valeur absolue de $\frac{d - d'}{2i}$, d et d' étant les distances de l'origine des coordonnées aux deux droites parallèles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (\cos\theta \pm i \sin\theta)\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Exemple. — Déterminer la nature, la grandeur et les plans principaux de la quadrique S représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$x^2 - y^2 + 2z^2 + 4zx + 2xy + 2y + 6z - 3 = 0.$$

L'équation du cône Γ est ici

$$(x + y + 2z)^2 + (x - y + 1)^2 + (2x + 2z + 3)^2 = 0,$$

ou $\quad 2\varphi(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2 + 2yz + 6zx + 7x - y + 6z + 5 = 0$

ou

$$4z = -(3x + y + 3) \pm \sqrt{(3x + y + 3)^2 - 4(3x^2 + y^2 + 7x - y + 5)}:$$

ce cône n'est pas réduit à deux plans.

L'équation du cône Γ' est

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 0,$$

avec $\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x + 3z + \frac{7}{2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y + z - \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 3x + y + 4z + 3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

il est formé des plans correspondant à

$$2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (1 \pm i\sqrt{3})\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

dont les bissecteurs sont les plans P, P' correspondant à la formule

$$\frac{6x + (1 + i\sqrt{3})y + (7 + i\sqrt{3})z + \frac{13}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{36 + (1 + i\sqrt{3})^2 + (7 + i\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{6x + (1 - i\sqrt{3})y + (7 - i\sqrt{3})z + \frac{13}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{36 + (1 - i\sqrt{3})^2 + (7 - i\sqrt{3}}}.$$

La surface S est donc un paraboloïde (évidemment hyperbolique) ayant pour plans principaux les plans P, P'.

La quadrique Γ est nécessairement un cylindre elliptique imaginaire : son équation, quand on transporte l'origine au point $\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}, 0\right)$ qui en est un centre, devient

$$3(x + z)^2 + (y + z)^2 + \frac{2}{3} = 0.$$

La condition pour que ce cylindre touche la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

est
$$81R^4 + 48R^2 + 4 = 0:$$

en y changeant R en iR, on aura l'équation aux carrés des paramètres principaux du paraboloïde. Ces paramètres ont, dès lors, pour valeurs $\frac{\sqrt{21} \pm \sqrt{3}}{9}$.

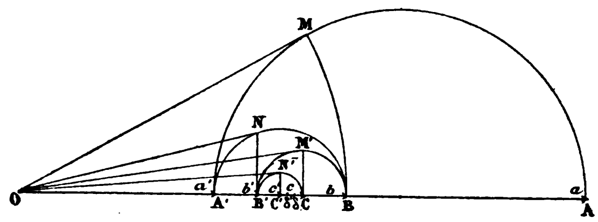
Les équations de l'axe du paraboloïde sont

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x + 3z + \frac{7}{2} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GREGORY

Par M. **Aubry**.

Nous avons été amené dans une étude qui sera prochainement publiée dans le *Journal de Mathématiques spéciales* à un théorème qui peut être considéré comme l'interprétation analytique d'une série de propositions dues à James Gregory (*Vera Circuli et Hyperbolæ quadratura*, Padoue, 1668). La vérification du théorème auquel nous sommes parvenu



nous a paru devoir fournir quelques bons exercices de calcul, c'est pourquoi nous proposerons cette nouvelle démonstration.

Voici le théorème en question :

Formons une suite a, a', b, b', c, c' ... *dont les deux premiers termes soient* $\frac{x^2-1}{2x}$, $2\frac{x-1}{x+1}$ *et chacun des suivants alternativement moyen géométrique et moyen harmonique des deux précédents : si* x *surpasse* 1, *les termes de cette suite oscillent vers la limite* Lx *de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on veut.*

Soient p, p', q, q' *quatre termes consécutifs de la série ; si* $2p' > q$, *on aura les limites plus resserrées*

$$\frac{2p+p'}{3}, \qquad \frac{4q-p}{3}.$$

On a d'après une formule connue

$$(\alpha)\quad Lx = 2\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots$$

d'où

$$2\,\frac{x-1}{x+1}\left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 + \dots\right] > Lx > 2\,\frac{x-1}{x+1}.$$

Sommant la progression géométrique entre crochets (*), on trouve pour la valeur du premier membre $\frac{x-1}{x+1}$, quantité plus petite que $\frac{x^2-1}{2x}$, puisqu'on suppose $x > 1$. On a donc *a fortiori :*

$$\frac{x^2-1}{2x} > lx > 2\frac{x-1}{x+1} \qquad (**)$$

(*) Ou bien, changeons x en $\frac{1+z}{1-z}$ dans (α) et multiplions ensuite les deux membres par $1-z^2$, il vient

$$(1-z^2)L\frac{1+z}{1-z} = (1-z^2)\left(2z+\frac{2z^3}{3}+\frac{2z^5}{5}+\ldots\right) = z-\frac{2}{1.3}z^3-\frac{2}{3.5}z^5-\frac{2}{5.7}z^7-\ldots$$

d'où en divisant par $1-z^2$ et revenant à la variable x en posant $z=\frac{x-1}{x+1}$

$$Lx = \frac{x-1}{x}\left\{\frac{x+1}{2}-\left[\frac{1}{1.3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+\frac{1}{3.5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4+\ldots\right]\right\}$$

Cette formule, due à Dubourguet (*Annales de Gergonne*, t. II), donne immédiatement la première inégalité que nous avions en vue.

(**) *Autrement.* On a

$$\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4} = z\left(1+\frac{4z^2}{1.2.3.}+\frac{16z^4}{1.2\ldots5}+\ldots\right) > z$$

$$\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} = z\,\frac{1+\frac{z^2}{1.2.3.}+\frac{z^4}{1.2\ldots5}+\ldots}{1+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\ldots} < z$$

d'où

$$\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4} > z > \frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}$$

relation qui devient la précédente en faisant $e^{2z}=x$.

Elle peut aussi se tirer des deux développements.

$$\frac{e^{2z}-e^{-2z}}{4} = z\left(1+\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

$$\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}} = z\,\frac{\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots}{\left(1+\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\cdots}$$

Elle correspond à la relation $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, dont on peut la déduire en remplaçant les sinus et cosinus par leurs valeurs en exponentielles imaginaires, et remarquant que la relation $ai < bi$ entraîne cette autre $a > b$.

Changeons x en $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt{x}$, ... et multiplions par 2, 4, 8, ... : on trouve

$$a > \mathrm{L}x > a'$$
$$b > \mathrm{L}x > b'$$
$$c > \mathrm{L}x > c'$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

On démontre facilement $a > b > c > \ldots$ et $a' < b' < c' < \ldots$ Il faut maintenant faire voir que ces limites de lx s'en rapprochent de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on veut. En effet, soient

$$p = 2^{n-2}\,\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} - 1}{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}, \qquad p' = 2^{n}\,\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{1}} - 1}{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} + 1}$$

$$q = 2^{n-1}\,\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} - 1}{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}, \qquad q' = 2^{n+1}\,\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} - 1}{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} + 1}$$

on aura
$$\frac{q}{p'} = \frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} + 1}{2x^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}} = \frac{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}}{2}$$

quantité qui tend vers l'unité quand n augmente de plus en plus.

La première partie est démontrée.

D'après la formule rappelée au commencement de cette Note, on a

$$\mathrm{L}x < 2\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{3}\left[1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{4} + \ldots\right]$$

Le premier terme du second membre est égal à a'. En sommant la progression du second degré, on trouve qu'il est égal à $\frac{1}{3}(a - a')$, on a donc

$$(\beta) \qquad \mathrm{L}x < \frac{2a' + a}{3}.$$

D'autre part, on peut poser $\left(\sqrt{x - 1}\right) > 0$. Développons, ajoutons aux deux membres la quantité $(x+1)(x^2 + 6x + 1)$ $\left(8\sqrt{x} - x + 1\right)$ et multiplions les deux membres de la nou-

velle inégalité par

$$\frac{x-1}{6x(x+1)(x^2+6x+1)},$$

on obtient

$$\frac{2}{3}\,\frac{x-1}{x+1}\,\frac{6(x+1)^2-(x-1)^2}{2(x+1)^2-(x-1)^2} > \frac{x-1}{6x}\left(8\sqrt{x}-x-1\right),$$

inégalité équivalente à la suivante :

$$2\,\frac{x-1}{x+1}+\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} > \frac{1}{3}\left(4\,\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\frac{x^2-1}{2x}\right).$$

Le second membre est égal à $\frac{4b-a}{3}$. Le premier devient en développant en série son second terme

$$2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{6}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\frac{1}{12}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^7+\dots\right],$$

quantité plus petite que Lx. On a donc *a fortiori*

$$(\gamma) \qquad Lx > \frac{4b-a}{3} \qquad (*).$$

Changeons x en $x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ dans (β) et (γ) et multiplions par 2^n, il vient

$$\frac{2q'+q}{3} > Lx > \frac{4q-p}{3}.$$

Il reste à faire voir que les limites précédentes sont plus

(*) *Autrement.* — On a

$$(p)\begin{cases} \dfrac{e^{2z}-e^{-2z}}{2}+\dfrac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=\dfrac{e^{4z}+3e^{2z}-e^{-2z}-3}{2(e^{2z}+1}=3z\dfrac{1+\frac{2z}{2}+\frac{14.6}{6}z^2+\dots}{1+\frac{z}{1}+\frac{2}{2}z^2+\frac{4}{6}z^3+\dots}>3z \\[2ex] 4\dfrac{e^{2z}-1}{e^z}-\dfrac{e^{4z}-1}{2e^{2z}}=\dfrac{8e^{4z}-8e^{2z}-e^{5z}+e^z}{2e^{3z}}=6z\dfrac{2+6\frac{z}{2}+27\frac{z^2}{6}+108\frac{z^3}{24}+\dots}{1+3\frac{z}{1}+9\frac{z^2}{2}+27\frac{z^3}{6}+\dots}<6z \end{cases}$$

Remplaçant e^{2z} par x, on obtient

$$2\,\frac{x^2-1}{2x}+2\,\frac{x-1}{x+1} > 3Lx > 4\,\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\frac{x^2-1}{2x}.$$

Les inégalités (p) sont des conséquences des deux suivantes :

$4^m+3.2^m-(-2) > 6m2^{m-1}, \qquad 8.4^m-8.2^m-5^m+1 < 12m3$

qui ont lieu pour m entier supérieur à 2, et que nous laissons à démontrer.

rapprochées que q et q'. D'abord, de $q - q' > 0$, on tire $\frac{2q' + q}{3} < q$. Maintenant, quel que soit le nombre n, on a, en posant $y \doteq x^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$:

$$y - 1 > 0 \quad \text{et } a\ fortiori \quad y + 2 - \sqrt{3} > 0.$$

Si on prend n assez grand, on aura $y < 2 + \sqrt{3}$, et par suite $2 + \sqrt{3} - y > 0$. Multipliant ces deux inégalités, il vient

$$4y - y^2 - 1 > 0.$$

Multiplions par la quantité positive $(y - 1)^2$ et ajoutons $24y^2$ aux deux membres, nous avons

$$(y + 1)^2(8y - y^2 - 1) > 24y^2,$$

d'où, en multipliant les deux membres de cette nouvelle inégalité par $\frac{y - 1}{3y^2(y + 1)}$,

$$\frac{1}{3}\left(8\frac{y^2 - 1}{y} - \frac{y^4 - 1}{y}\right) > 8\frac{y - 1}{y + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{4q - p}{3} > q'.$$

On remarquera que cette méthode correspond à la construction graphique suivante :

Prenons sur une même droite, à une échelle d'autant plus grande que nous voulons plus d'exactitude, deux longueurs $OA = a$, $OA' = a'$. Sur AA' comme diamètre, décrivons une demi-circonférence à laquelle nous mènerons une tangente OM que nous rabattrons en OB. De même, sur A'B comme diamètre, décrivons une demi-circonférence à laquelle nous mènerons une tangente ON dont nous projetterons en B' le point de contact. Sur BB' décrivons une troisième demi-circonférence, tirons la tangente OM' que nous rabattons en C. Sur B'C décrivons une quatrième demi-circonférence et tirons la tangente ON' dont nous projetterons, en C', le point de tangence. Et ainsi de suite. Les points A, A', B, B', C, C', ... se rapprochent les uns des autres et la limite X donne, à l'échelle adoptée, $OX = Lx$.

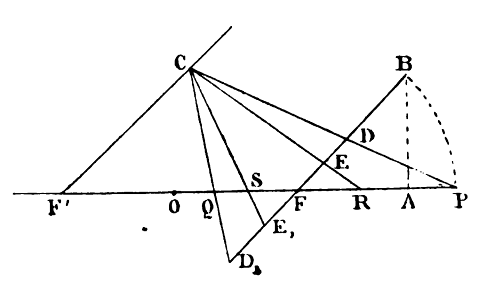
Soient B, B' et C, C', deux couples voisins : Si on prend $C'\delta' = \frac{1}{3}C'C$, $C\delta = \frac{1}{3}CB$, les deux points δ, δ' seront des limites encore plus rapprochées.

DEUX CONSTRUCTIONS PAR POINTS DE LA LEMNISCATE.

Par M. **C. Margerie.**

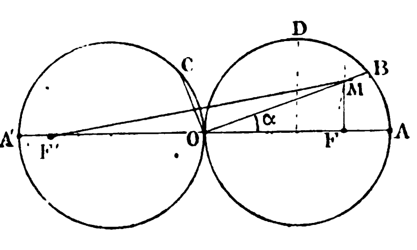
I. — F et F′ sont les foyers, O est le centre, *(fig. 1)*.

FA=OF, AB perpendiculaire à OA est égale à FA; FP=FB.



Sur une parallèle à FB, menée par F′, prenons un point C quelconque. CP coupe FB en D; $FD_1 = FD$, CD_1 coupe FF′ en Q. OP et OQ sont le rayon vecteur maximum et le rayon vecteur minimum de la lemniscate. En prenant E *entre* F *et* D, $FE_1 = FE$ et en menant CER, CSE_1, OS et OR sont deux autres rayons vecteurs d'un même point de la lemniscate.

II. — Soient *(fig. 2)* F et F′ les foyers, O le centre, $OF = a$. Prenons $OA = OA' = a\sqrt{2}$ et décrivons deux circonférences sur OA et OA′ comme diamètres. Sur le quadrant AD prenons un point quelconque B, menons OB et OC perpendiculaires à OB; enfin, de C comme centre avec OB comme rayon, décrivons un arc de cercle qui coupe OB en M. M est un point de la lemniscate. Car si $BOA = \alpha$,



$$\overline{MF}^2 = a^2 + \overline{OM}^2 - 2a.OM.\cos\alpha,$$

$$\overline{MF'}^2 = a^2 + \overline{OM}^2 + 2a.OM.\cos\alpha,$$

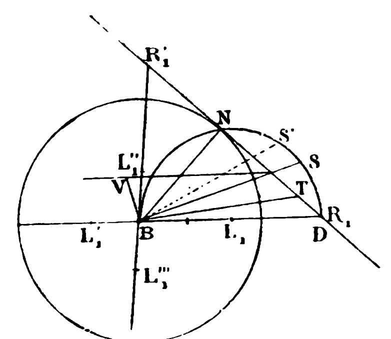
$$\overline{MF}^2.\overline{MF'}^2 = (a^2 + \overline{OM}^2)^2 - 4a^2.\overline{OM}^2\cos^2\alpha$$

$$= a^4 + \overline{OM}^2[\overline{OM}^2 + 2a^2 - 4a^2\cos^2\alpha].$$

Mais $\overline{OM}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2 = 2a^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 \sin^2 \alpha,$
donc

$$\overline{MF}^2 . \overline{MF'}^2 = a^4 + \overline{OM}^2 [-2a^2 \cos^2 \alpha - 2a^2 \sin^2 \alpha + 2a^2] = a^4,$$
$$MF . MF' = a^2.$$

Note. Nous trouvons dans les *Archiv der Mathematikund Physik*, de Leipzig, la construction suivante de la lemniscate, donnée par M. Ernst Schultz.



Je fais $BN = a$ où a est une constante, et j'élève en N une perpendiculaire à BN. Soit $ND = a$ cette perpendiculaire, j'ai ainsi

$$BD = b = a\sqrt{2}.$$

Le cercle décrit sur BD comme diamètre passe par N. Maintenant, je mène par B une sécante BS, telle que S soit sur le cercle décrit sur BD comme diamètre.

Elle rencontre le cercle de rayon $BN = a$ en un point T.

La parallèle à BD menée par T rencontre la perpendiculaire à BS en B au point V.

De B avec BS comme rayon je décris un cercle qui coupe ND en R_1 et R_1'.

La circonférence décrite de B, comme centre, avec BV comme rayon, coupera BR_1 et BR^1 en L_1, L', L_1'', L_1''', ces quatre points sont quatre points de la lemniscate.

En prenant une autre droite BS′ on aura quatre autres points.

EXERCICE ÉCRIT

75. — 1° D'un point du plan d'une conique conjuguée par rapport à un triangle on mène des coniques circonscrites au triangle; aux quatre points communs à ces deux coniques on mène les tangentes à la conique donnée; le lieu géométrique des sommets du quadrilatère ainsi formé est une cubique circonscrite au triangle.

2° Déduire, de cette propriété, la suivante:

On considère une conique conjuguée par rapport à un triangle et en trois des quatre points de rencontre de cette

conique et d'une conique quelconque circonscrite au triangle on mène les tangentes à la conique donnée. Montrer qu'il existe une conique circonscrite au triangle formé par ces trois tangentes et passant pour les trois sommets du triangle donné.

(G. Leinekugel.)

Notes sur l'exercice 74.

1° Axes ordinaires de la parabole. — En partant de l'équation générale $y^2 - 2px + \lambda\left(y - mx - \frac{2m}{p}(y + mx + n)\right) = 0$; on trouve : $\lambda = -\frac{1+m}{1}$, $n = \frac{3pm}{2}$; ce qui donne :

$$4m^2(x^2 + y^2) - 2pm(m^2 + 3)x - 2p(3m^2 - 1)y + 3p^2m = 0.$$

2° Lieu du centre. — En éliminant m entre les équations du centre et transportant l'origine au point : $x = \frac{3p}{2}$, $y = 0$, on trouve la cubique : $nx + 9p)x^2 - 27py^2 = 0$.

3° Nombre des cercles : 3 en général. — Si le point P est sur l'axe des x, une des racines de l'équation en m est nulle, et le cercle correspondant se réduit à une droite. — Si P est le foyer, l'équation en m devient une identité.

4° Le centre de gravité a pour coordonnées : $x_0 = \frac{p}{6}\sum\frac{1}{m^2}$, $y_0 = \frac{p}{3}\sum\frac{1}{m}$, m, m', m'' étant les trois racines de l'équation en m qui correspondent à un même point P du plan. On en déduit la relation $x_0 = \frac{p}{6}\left(9\frac{y_0^2}{p^2} + 6\right)$, qui correspond à une parabole ayant son sommet au point $x = p$, $y = 0$, et pour paramètre $\frac{p}{3}$.

5° L'équation d'un cercle quelconque étant : $x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2\mu y + \nu = 0$, on exprime que l'équation, en m, des points d'intersection avec la parabole a pour trois de ses racines les valeurs de m qui correspondent aux trois points de contact dont les coordonnées sont $x = \frac{p}{2m^2}$, $y = \frac{p}{m}$; ce qui détermine λ, μ et ν.

— Si le cercle passe par le sommet, on a $\nu = 0$; ce qui donne l'équation $[2(x^2 + y^2) - px](2x - p) = 0$, laquelle représente la circonférence décrite sur OF comme diamètre (facile à expliquer) et la perpendiculaire à l'axe, menée par le foyer.

— Si le cercle passe par le foyer, on a : $\nu = -\lambda - \frac{p}{4}$; ce qui donne le lieu : $[(2x - p)^2 + 4y^2](2x - 3p) = 0$, qui se réduit au foyer et à la droite symétrique de la directrice par rapport au foyer.

— Pour que le centre du cercle soit sur l'axe, il faut $\mu = 0$; ce qui donne : $x^2 + y^2 - 4px = 0$ en transportant l'origine au foyer.

— Pour que le cercle ait un rayon constant, on trouve en transportant l'origine au foyer :

$$y^2(x^2 + y^2 - 16px)^2 + p^2(9x^2 - 7y^2)^2 = 16R^2y^4.$$

On peut discuter par la méthode des régions, et au moyen des coordonnées polaires. — On étudiera les tangentes à l'origine en faisant varier R; le cas de transition a lieu pour $4R = 7p$.

Remarque (*). — Voici *trois* propriétés assez curieuses.

1° *Le rayon du cercle* C *est le* $\frac{1}{4}$ *du rayon du cercle oscillateur au point de contact de* C *avec la parabole.*

2° *Les cercles* C *rencontrent la parabole en deux autres points que le point de contact. La droite qui joint ces deux points passe par un point fixe.*

Les coordonnées de ce point fixe sont

$$y = 0, \qquad x = -\frac{3p}{2}.$$

3° *Le cercle* C *peut être considéré comme la limite vers laquelle tend le cercle circonscrit au triangle formé par les trois tangentes à la parabole, lorsque les trois points de contact tendent à se réunir en un seul.*

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de calcul intégral, par *L. Colette*, ancien élève de l'École normale des sciences de Gand, professeur agrégé de l'enseignement moyen du degré supérieur. (Liège, Marcel Nierstrasz, éditeur, rue de la Cathédrale.)

Nous signalons avec plaisir à nos lecteurs cet opuscule dans lequel M. Colette a résumé les solutions des questions proposées dans le cours d'Analyse que professe M. Neuberg à l'Université de Liège. Des exercices de calcul intégral, on peut en faire indéfiniment : le difficile, c'est de les grouper de façon que le lecteur puisse saisir ce qu'on peut nommer *un genre* de questions, genre auquel s'applique avec succès une méthode déterminée d'intégration. C'est ce que M. Colette a voulu réaliser, autant que possible, en groupant ses exercices en dix chapitres, chacun d'eux correspondant à un procédé particulier d'intégration. Les nouveaux programmes de l'École Polytechnique, en introduisant la Mécanique dans le cours de Mathématiques spéciales, vont pousser de plus en plus cet enseignement vers la partie élémentaire du calcul intégral. Les professeurs qui ont souvent à proposer à leurs élèves des exercices faciles de calcul intégral, les élèves qui désirent entrer à l'École en possédant déjà la base de ce calcul, trouveront grand profit à la lecture d'un livre sur lequel nous appelons ici leur attention.

Annuaire pour l'an 1894, publié par le Bureau des Longitudes. — In-18 de v-886 pages, avec 2 cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1 fr. 50.)

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1894 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les monnaies, la statistique, la géographie,

(*) Cette remarque est de M. E.-N. Barisien, elle accompagnait la solution qu'il nous avait adressée. Les notes qui précèdent sont de M. Delens qui avait proposé l'exercice.

la minéralogie, etc., enfin les notices suivantes : La lumière et l'électricité, d'après Maxwell et Hertz; par M. Poincaré. — L'origine et l'emploi de la boussole marine appelée aujourd'hui compas; par le contre-amiral Fleuriais. — Quatre jours d'observation au sommet du mont Blanc ; par M. J. Janssen. — Discours prononcés aux funerailles de l'amiral Pâris ; par MM. Faye, Bouquet de la Grye et le contre-amiral Fleuriais. — Discours prononcés à l'inauguration de la statue d'Arago; par MM. Tisserand, Cornu, Mouchez.

QUESTION 348

Solution par M. Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand.

On considère une hyperbole H; *par le centre* O *de cette courbe, on mène des perpendiculaires* δ, δ', *aux asymptotes* Δ, Δ'; *et l'on obtient, sur* H, *quatre points* A, B, C, D *formant un rectangle. Soit* Γ *la circonférence circonscrite à ce rectangle. Par un point* M, *arbitrairement choisi sur* H, *on mène des tangentes* MP, MQ, *à* Γ.

1° OP, OQ *forment, avec les droites* δ, δ', *un faisceau harmonique.*

2° *Parallèlement à l'une des asymptotes* Δ', *on trace une transversale; elle coupe* Γ, H *et* δ', *en quatre points formant une division harmonique.* (G. L.)

Soient $\quad H = b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$

$$\Delta = bx + ay = 0 \ , \qquad \Delta' = bx - ay = 0,$$
$$\delta = ax - by = 0 \ , \qquad \delta' = ax + by = 0.$$

Une conique circonscrite à ABCD sera représentée par

$$H - \lambda\delta\delta' = 0; \quad \text{et, pour} \quad \lambda = -1, \quad \text{on a}$$
$$\Gamma = (b^2 - a^2)(x^2 + y^2) - a^2b^2 = 0.$$

Soit M (α, β) un point de H. La polaire PQ de M par rapport à Γ sera représentée par

$$\varphi = (b^2 - a^2)(\alpha x + \beta y) - a^2b^2 = 0.$$

En éliminant t entre $\Gamma\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0$ et $\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0$, on trouve

$$(\beta^2 - \alpha^2)(a^2x^2 + b^2y^2) + 2(b^2 - a^2)\alpha\beta xy = 0,$$

équation du faisceau OP, OQ. Pour $y = mx$, on a

$$b^2(\beta^2 - \alpha^2)m^2 + 2(b^2 - a^2)\alpha\beta m + a^2(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

comme équation dont les racines sont les coefficients angulaires m_1, m_2 de OP, OQ. Mais

$$m_1 m_2 = \frac{a^2}{b^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{m_1 - \frac{a}{b}}{m_1 + \frac{a}{b}} : \frac{m_2 - \frac{b}{a}}{m_2 + \frac{a}{b}} = -1,$$

donc les quatre droites OP, OQ, δ, δ' forment un faisceau harmonique.

2. Prenons pour axes des X et des Y respectivement δ et Δ.

Les formules de transformation sont :

$$x = \frac{bX - aY}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad = y \frac{aX + bY}{\sqrt{a^2 + a^2}}$$

et $$H = (b^2 - a^2)X^2 - 2abXY - a^2b^2 = 0;$$

l'équation de Γ reste

$$\Gamma = (b^2 - a^2)(X^2 + Y^2) - a^2b^2 = 0;$$

δ' sera $$2abX + (b^2 - a^2)Y = 0.$$

Soit $X - m = 0$ l'équation de la transversale.

Le point d'intersection de cette transversale et de H, situé à distance finie, a pour coordonnées :

$$X = m \qquad Y_1 = \frac{(b^2 - a^2)m^2 - a^2b^2}{2abm};$$

celui de $X - m = 0$ et de δ' est

$$X = m \qquad Y_2 = -\frac{2abm}{b^2 - a^2};$$

ceux de Γ et de $X - m = 0$ sont

$$X = m \qquad Y_3^2 = Y_4^2 = \frac{a^2b^2 - (b^2 - a^2)m^2}{b^2 - a^2}.$$

D'où $$Y_3^2 = Y_4^2 = Y_1 Y_2.$$

Ainsi, les quatre points où la transversale coupe Γ, H et δ' forment une division harmonique.

Nota. — Autre solution par M. E.-N. Barisien.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26768-11-93.

SUR UNE RÈGLE DE CONVERGENCE DES SÉRIES
A TERMES POSITIFS

Par M. S. Chatounovsky.

En désignant par s_n la somme des n premiers termes de la série

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots + u_{2^n} + \ldots$$

à termes positifs et décroissants, et par σ_n la somme des n premiers termes de la série

$$\sigma = 2u_2 + 4u_4 + \ldots + 2^n u_{2^n} + \ldots$$

on a

$$(1) \qquad \sigma_n > s_{2^{n+1}} - (u_1 + u_2),$$

$$(2) \qquad 2s_{2^n} > \sigma_n.$$

En effet, nous pouvons regarder les expressions $u_{2^n+} + u_{2^n+2} + \ldots + u_{2^{n+1}}$ et $2(u_{2^{n-1}+1} + u_{2^{n-1}+2} + \ldots + u_{2^n})$ comme les termes généraux des deux séries $s - (u_1 + u_2)$ et $2s$. Le terme général $2^n u_{2^n}$, de la série σ, restant toujours compris entre les deux derniers termes généraux, les inégalités (1) et (2) auront lieu.

On fait ordinairement usage des inégalités (1) et (2) pour montrer que les séries s et σ sont simultanément convergentes, mais on arrive à des résultats plus importants par des considérations sur le rapport des termes généraux $2^n u_{2^n}$ et u_n des deux séries σ et s.

Soit, en effet, $l = \lim \left[\dfrac{2^n u_{2^n}}{u_n}\right] \quad n = \infty.$

Si l est un nombre fini, on pourra assigner deux nombres finis, positifs, a et b tels que

$$a > l > b.$$

Quand $l = 0$, on ne trouve qu'un seul nombre a et, si $a = \infty$, il n'existe qu'un seul nombre b. Toutefois, pour les valeurs suffisamment grandes de n, le rapport $\dfrac{2^n u_{2^n}}{u}$

satisfera à l'une au moins des deux inégalités

$$a > \frac{2^n u_{2^n}}{u_n} > b.$$

On peut dire que l'une de ces inégalités ou les deux subsistent, même à partir de $n = 1$, parce que l'on peut regarder chaque terme d'une série comme le premier, quand on ne considère que sa convergence, et rien n'empêche de prendre, pour premier terme, celui à partir duquel les inégalités précédentes subsistent.

L'inégalité $a > \frac{2^n u_{2^n}}{u_n}$ ou $au_n > 2^n u_{2^n}$

nous donne $as_n > \sigma_n$,

d'où, à cause de l'inégalité (1), nous aurons

$$as > s_{2^n+1} - (u_1 + u_2).$$

et, *a fortiori*, $as_n > s_n - (u_1 + u_2)$,

d'où, en supposant $a < 1$, on a

$$s_n < \frac{u_1 + u_2}{1 - a}$$

pour toutes les valeurs de n. Par suite, la série s est convergente, quand $a < 1$. Mais si l'on a $l < 1$, on pourra prendre $a < 1$; or *la série* s *est convergente quand* l < 1.

D'une manière analogue on démontrera, au moyen des inégalités (2) et

$$\frac{2^n u_{2^n}}{u_n} > b,$$

que $2s_{2^n} > bs_n$.

Admettons que s soit convergente. On aura alors

$$2s > bs,$$

ce qui est impossible quand $b > 2$. La série s ne peut donc être convergente si $b > 2$, mais, si $l > 2$, on pourra prendre $b > 2$; or *la série* s *est divergente, quand* l *surpasse* 2.

On peut donc toujours reconnaître si une série $s = \Sigma u_n$, à termes positifs est convergente ou divergente, quand la limite du rapport $2^n u_{2^n} : u_n$, pour $n = \infty$, tombe en dehors de deux nombres 1 et 2, mais *jusqu'à présent, on ne peut pas former une série à termes positifs et décroissants pour laquelle la limite en question soit différente de* 0 *ou de* ∞.

C'est M. Ermakof qui a démontré le premier (*) que la série $s = \Sigma u_n$ à termes positifs et décroissants est convergente ou divergente, pourvu que la limite de $2^n u_{2^n} : u_n$, pour $n = \infty$, soit inférieure ou supérieure à $\frac{1}{\lg 2}$ (lg désignant le logarithme népérien).

Mais la démonstration de M. Ermakof, fondée sur le critérium, bien connu, de Cauchy et sur les propriétés des intégrales définies, exige que la fonction u_n reste continue et décroissante pour toutes les valeurs de n qui surpassent un certain nombre fini; nous n'avons pas eu à faire cette hypothèse dans la démonstration précédente.

SUR LA LIMITE DE $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$

Par M. **Maurice Fouché,** professeur à Sainte-Barbe.

Le raisonnement suivant, comparé à la démonstration habituelle, me paraît présenter l'avantage de conduire directement à la conclusion presque sans calcul et sans l'intervention d'un lemme préliminaire. Ce raisonnement, du reste, diffère peu de celui qui a été donné pour la première fois par Duhamel.

Il s'agit de démontrer que l'expression

$$M = \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m,$$

tend vers la somme de la série

$$E(z) = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

lorsque m augmente indéfiniment.

Je me bornerai au cas où m augmente indéfiniment par des valeurs entières et positives.

(*) Voir l'article « Caractère de convergence des séries » (*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1871). Voir aussi un extrait d'une lettre de M. Korkine à M. Hermite, dans le *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1882).

Je désignerai par M_p le développant de $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ *limité au terme en* z^p, par $E_p(Z)$ la somme des termes de la série limitée également au terme en z^p, et par ρ le module de z. Le terme général de M se met sous la forme

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{z^n}{n!}.$$

On remarquera que

1° Ce terme tend vers le terme correspondant de la série $\frac{z^n}{n!}$ lorsque m augmente indéfiniment.

2° Le module de ce terme est plus petit que le module $\frac{\rho^n}{n!}$ du terme correspondant de la série.

Si donc on limite le développement au terme d'ordre p, la somme des termes négligés aura un module inférieur à la somme des modules des termes correspondants de la série, et inférieur, *a fortiori*, à la somme de la série des modules à partir du terme d'ordre $p + 1$, c'est-à-dire qu'on aura

$$|\,M - M_p\,| \leqslant E(\rho) - E_p(\rho).$$

Si de même on limite la série au terme d'ordre p, le module de l'erreur sera plus petit que la somme des modules des termes négligés, c'est-à-dire qu'on aura

$$|\,E(z) - E_p(z)\,| \leqslant E(\rho) - E_p(\rho).$$

Or, on peut choisir p assez grand pour que $E(\rho) - E_p(\rho)$ soit plus petit qu'un nombre donné $\frac{\varepsilon}{3}$; on aura dès lors :

$$|\,M - M_p\,| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|\,E(z) - E_p(z) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

p étant ainsi déterminé, la somme M_p tendra vers $E_p(z)$ si m augmente indéfiniment, c'est-à-dire qu'on pourra trouver un nombre m_1 tel que, si $m > m_1$, on aura :

$$|\,M_p - E_p(z)\,| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais la différence $E(z) - M$ est la somme des trois diffé-

rences précédentes; donc son module sera plus petit que la somme de leurs modules, et *a fortiori*

$$| E(z) - M | < \varepsilon.$$

Cette inégalité est indépendante de p et montre qu'on peut trouver un nombre m, tel que si m est plus grand que m_1, le module de la différence $E(z) - M$ soit plus petit qu'un nombre donné ε. C. Q. F. D.

Remarque. — Si l'on se borne aux valeurs réelles de z, le raisonnement peut encore être simplifié. On remarque d'abord que pour z positif on a

$$M_p < M < E(z),$$

d'où
$$E(z) - M < E(z) - M_p.$$

On choisit p de manière que

$$E(z) - E_p(z) < \frac{\varepsilon}{2},$$

Puis on détermine m de manière que

$$E_p(z) - M_p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il en résulte :

$$E(z) - M_p < \varepsilon;$$

et *a fortiori*
$$E(z) - M < \varepsilon.$$
C. Q. F. D.

Si z est négatif, on observe que les termes de M, aussi bien que ceux de $E(z)$, sont alternativement positifs et négatifs. On considère séparément ces deux espèces de termes et l'on montre, en répétant le raisonnement précédent, que la somme des termes positifs de M a la même limite que celle des termes positifs de la série $E(z)$ et que la somme des termes négatifs de M a la même limite que celle des termes négatifs de $E(z)$.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1893

Solution par M. A.-H. Boulanger.

On considère un hyperboloïde à une nappe H *et le cône* S *qui est l'enveloppe des plans normaux aux génératrices de cet hyperboloïde, menés par un point donné* M.

1° Déterminer les sommets du tétraèdre $MM_1M_2M_3$, *conjugué*

par rapport à toutes les quadriques qui passent par l'intersection de l'hyperboloïde H *et du cône* S.

Trouver le lieu C *des sommets* M_1, M_2, M_3 *de ce tétraèdre lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné.*

2° *Trouver la surface engendrée par la ligne* C, *lorsque le point* M *décrit une droite donnée* D, *et déterminer les positions qu'il faut donner à cette droite* D *pour que la surface soit de révolution.*

3° *Déterminer les coordonnées du centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$ *en fonction des coordonnées du point* M *pour un hyperboloïde donné* H.

Trouver le lieu de ce centre ω *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique d'un hyperboloïde donné.*

4° *Démontrer que la droite qui joint le centre* ω *de la sphère circonscrite au tétraèdre* $MM_1M_2M_3$, *au centre de gravité* G *de ce tétraèdre, passe par un point fixe* I *lorsque, le point* M *restant fixe, l'hyperboloïde* H *se modifie en restant concentrique et homothétique à un hyperboloïde donné, et faire voir que le point* G *est le milieu de* $I\omega$.

Soit
$$H \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
l'équation de l'hyperboloïde donné. La parallèle à une génératrice de cet hyperboloïde, menée par l'origine, a pour équations :
$$\frac{x}{a\cos\varphi} = \frac{y}{b\sin\varphi} = \frac{z}{c},$$
et un plan normal à cette droite, mené par le point M, de coordonnées α, β, γ, est défini par :
$$a\cos\varphi(x-\alpha) + b\sin\varphi(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0;$$
l'enveloppe de ce plan est le cône dont l'équation est :
$$S \equiv a^2(x-\alpha)^2 + b^2(y-\beta)^2 - c^2(z-\gamma)^2 = 0.$$

1° Soit $$u(x-\alpha) + v(y-\beta) + w(z-\gamma) = 0,$$
l'équation du plan MM_2M_3 ; son pôle est le même par rapport à toutes les quadriques du faisceau :
$$\lambda H + \mu S = 0.$$

Les coordonnées de ce pôle M_1 satisfont, quels que soient λ et μ, aux relations :

$$\frac{u}{\frac{\lambda x}{a^2} + \mu a^2(x - \alpha)} = \frac{v}{\frac{\lambda y}{b^2} + \mu b^2(y - b)} = \frac{w}{-\left[\frac{\lambda z}{c^2} + \mu c^2(z - \gamma)\right]}$$
$$= \frac{u\alpha + v\beta + w\gamma}{\lambda + \mu[\alpha a^2(x - \alpha) + \beta b^2(y - \beta) - \gamma c^2(z - \gamma]}.$$

Elles vérifient donc les équations :

$$(1) \qquad \frac{a^4(x - \alpha)}{x} = \frac{b^4(y - \beta)}{y} = \frac{c^4(z - \gamma)}{z},$$

et

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} = 1.$$

Les équations (1) définissent une cubique gauche dont les trois points d'intersection, avec le plan représenté par l'équation (2), sont les points M_1, M_2, M_3.

Si l'on remplace l'hyperboloïde H par un autre qui lui soit concentrique et homothétique, a, b, c se trouvent remplacés par Ka, Kb, Kc, K étant un paramètre arbitraire. Ce paramètre disparaissant des équations (1), le lieu C des points M_1, M_2, M_3 est la cubique gauche (1) qui passe par l'origine, par le point M et par les trois points à l'infini sur les axes.

2° Supposons que le point M décrive une droite:

$$\alpha = A_1 u + A_2, \qquad \beta = B_1 u + B_2, \qquad \gamma = C_1 u + C_2.$$

La substitution de ces valeurs, dans (1), et l'élimination de u donne, pour lieu de la courbe C, la quadrique Σ représentée par l'équation :

$$\begin{vmatrix} a^4(x - A_2) & a^4 A_1 & x \\ b^4(y - B_2) & b^4 B_1 & y \\ c^4(z - C_2) & c^4 C_1 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Le cône asymptote de cette quadrique a pour équation :

$$\sum \frac{A_1}{x}\left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{b^4}\right) = 0.$$

Exprimons que ce cône est de révolution :

$$A_1^2\left(\frac{1}{c^4} - \frac{1}{b^4}\right)^2 = B_1^2\left(\frac{1}{a^4} - \frac{1}{c^4}\right)^2 = C_1^2\left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4}\right)^2.$$

ces équations définissent quatre directions pour lesquelles la quadrique Σ est de révolution.

3° Portons l'origine au point M; et soit

$$\sigma \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\xi X - 2\eta Y - 2\xi Z = 0\,,$$

l'équation de la sphère circonscrite au tétraèdre $MM_1M_2M_3$. Cette sphère coupe la cubique C en deux autres points, P et Q.

On connaît trois quadriques passant par ces six points; savoir :

$$\sigma_1 \equiv b^4Y(Z + \gamma) - c^4Z(Y + \beta) = 0;$$
$$\sigma_2 \equiv c^4Z(X + \alpha) - a^4X(Z + \gamma) = 0;$$
$$\sigma_3 \equiv a^4X(Y + \beta) - b^4Y(X + \alpha) = 0.$$

L'équation générale des quadriques passant par les points $MM_1M_2M_3$, P et Q est donc :

$$\sigma + \lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2 + \nu\sigma_3 = 0.$$

Exprimons que le système des deux plans $M_1M_2M_3$ et MPQ forme une de ces quadriques. En posant :

$$H_1 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} - 1,$$

ces deux plans sont respectivement représentés par les équations :

$$\frac{\alpha X}{a^2} + \frac{\beta Y}{b^2} - \frac{\gamma Z}{c^2} + H_1 = 0,$$
$$uX + vY + wZ = 0.$$

Une identification immédiate donne les relations :

$$1 = \frac{\alpha u}{a^2} = \frac{\beta v}{b^2} = -\frac{\gamma w}{c^2};$$

$$\lambda(b^4 - c^4) = \frac{\beta w}{b^2} - \frac{\gamma v}{c^2}; \qquad -2\xi + a^4(\nu\beta - \mu\gamma) = uH_1;$$

$$\mu(c^4 - a^4) = \frac{\alpha w}{a^2} - \frac{\gamma u}{c^2}; \qquad -2\eta + b^4(\lambda\gamma - \nu\alpha) = vH_1;$$

$$\nu(a^4 - b^4) = \frac{\beta u}{b^2} + \frac{\alpha v}{a^2}; \qquad -2\xi + c^4(\mu\alpha - \lambda\beta) = wH_1.$$

On en déduit :

$$\lambda = \frac{c^4\beta^2 + b^4\gamma^2}{b^2c^2\beta\gamma(c^4 - b^4)}; \qquad 2\xi = a^4(\nu\beta - \mu\gamma) - \frac{a^2H_1}{\alpha};$$

$$\mu = \frac{c^4\alpha^2 + a^4\gamma^2}{a^2c^2\alpha\gamma(a^4 - c^4)}; \qquad 2\eta = b^4(\lambda\gamma - \nu\alpha) - \frac{b^2H_1}{\beta};$$
$$\nu = \frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{a^2b^2\alpha\beta(a^4 - b^4)}; \qquad 2\xi = c^4(\mu\alpha - \lambda\beta) + \frac{c^2H_1}{\gamma}.$$

On reconnaît, tout de suite, qu'on peut mettre ξ, η, ζ sous la forme

$$2\xi = 2A + \frac{a^2}{\alpha},$$
$$2\eta = 2B + \frac{b^2}{\beta},$$
$$2\zeta = 2C - \frac{c^2}{\gamma},$$

A, B, C étant des fonctions homogènes, de degré zéro, par rapport à a, b, c.

Lorsque l'hyperboloïde se déforme en restant concentrique et homothétique à lui-même, c'est-à-dire quand a, b, c sont remplacés par Ka, Kb, Kc, le centre $\omega\,(\xi, \eta, \zeta)$ de la sphère circonscrite au tétraèdre décrit la droite représentée par les équations :

$$\frac{\xi - A}{\dfrac{a^2}{\alpha}} = \frac{\eta - B}{\dfrac{b^2}{b}} = \frac{\zeta - C}{-\dfrac{c^2}{\gamma}}.$$

Cette droite est parallèle à la droite qui joint le centre de l'hyperboloïde donné au conjugué normal du point M par rapport à cet hyperboloïde.

4° Conservons le point M comme origine; les points M_1, M_2, M_3 sont les points de rencontre de la cubique :

$$\frac{a^4X}{X + \alpha} = \frac{b^4Y}{Y + \beta} = \frac{c^4Z}{Z + \gamma},$$

et du plan :

$$\frac{\alpha X}{a^2} + \frac{\beta Y}{b^2} - \frac{\gamma Z}{c^2} + H_1 = 0.$$

Soient (ξ_1, η_1, ζ_1) les coordonnées du centre de gravité G du tétraèdre $MM_1M_2M_3$. Pour calculer ξ_1, formons l'équation aux X des points M_1, M_2, M_3. Cette équation est :

$$\frac{\alpha}{a^2}X^3 - \left\{ -H_1 + \frac{\beta^2a^4}{b^2(a^4-b^4)} - \frac{\gamma^2a^4}{c^2(a^4-c^4)} + \frac{\alpha^2}{a^2}\left[\frac{b^4}{a^4-b^4} + \frac{c^4}{a^4-c^4}\right] \right\} X^2 + \dots = 0.$$

Il en résulte que :

$$4\xi_1 = \frac{a^2}{\alpha}\left\{ -H_1 + \frac{\beta^2 a^4}{b^2(a^4-b^4)} - \frac{\gamma^2 a^4}{c^2(a^4-c^4)} + \frac{\alpha^2}{a^2}\left(\frac{b^4}{a^4-b^4} + \frac{c^4}{a^4-c^4}\right)\right\}.$$

Par permutations tournantes, on obtiendrait η_1 et ζ_1.

En comparant ces valeurs de ξ_1, η_1, ζ_1 à celles qui ont été obtenues plus haut pour ξ, η, ζ, on constate, par soustraction, que

$$4\xi_1 - 2\xi = a^4(\mu\gamma - \nu\beta)$$

$$+ \frac{a^2}{\alpha}\left\{\frac{\beta^2 a^4}{b^2(a^4 - b^4)} - \frac{\gamma^2 a^4}{c^2(a^4 - c^4)} + \frac{\alpha^2}{a^2}\left(\frac{b^4}{a^4 - b^4} + \frac{c^4}{a^4 - c^4}\right)\right\};$$

. . . .

Prolongeons ωG d'une longueur GI égale à ωG. Les coordonnées du point I sont:

$$X = 2\xi_1 - \xi.$$

. . . . .

Donc X, Y, Z ne dépendent de a, b, c que d'une manière homogène et au degré zéro. Le point I reste, par suite, fixe quand l'hyperboloïde donné se déforme en restant concentrique et semblable à lui-même. C. Q. F. D.

Un calcul bien facile donne pour les coordonnées du point I, les expressions :

$$X = \alpha\left[\frac{c^2}{a^2 - c^2} - \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right]$$

. . . .

Ces coordonnées deviennent, si on retourne aux axes primitifs :

$$x = \frac{\alpha(a^4 + b^2c^2)}{(a^2 - c^2)(a^2 + b^2)}.$$

. . . .

Remarque. — On observera que les calculs rencontrés dans cette question se présentent sous la même forme que ceux qui sont offerts par les problèmes classiques sur les normales aux quadriques.

VARIÉTÉS

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

A PROPOS DU LIVRE DE M. PINET *

Je m'étais promis, lorsque j'ai présenté cet ouvrage aux lecteurs du *Journal* (**), d'en faire au premier jour une analyse plus complète. Je viens aujourd'hui satisfaire à cette promesse, après avoir enfin trouvé le temps de lire avec soin ce beau livre. J'ai vu avec plaisir qu'il ne s'adressait pas seulement aux anciens élèves de l'École polytechnique, mais à tous ceux qui, à des titres divers, s'intéressent à elle.

En écrivant cette histoire de l'École polytechnique, l'auteur, que j'ai le plaisir de compter au nombre de mes amis, s'est conformé à un plan qu'on ne peut que trouver excellent. Pour donner à son récit une allure plus vive et le rendre ainsi plus attrayant et plus facile à suivre, M. Pinet a très heureusement séparé les parties techniques proprement dites, celles qui ne peuvent être présentées qu'accompagnées de pièces officielles et de certains documents historiques, de la partie anecdotique. Celle-ci, sous le titre *Souvenirs et traditions*, occupe les 350 premières pages; le reste du volume est consacré à l'histoire des organisations successives de l'École (***). Le tout constitue une lecture qui sera vivement goûtée, non seulement par les anciens élèves de l'Ecole polytechnique, mais par tous ceux qui s'intéressent à ce qui est grand et noble dans notre patrie française.

Oui, grande et noble, telle nous apparaît, en dehors de tout esprit de coterie, l'École polytechnique, depuis ses premiers jours; telle, nous la voyons encore aujourd'hui; telle, elle restera, nous l'espérons, pour le bien de la science et de la patrie; si, heureusement dirigée, elle sait résister aux attaques, souvent injustes, quelquefois méritées, dont elle est l'objet

De quelle nature sont les attaques auxquelles nous faisons allusion? A quel degré quelques-unes d'entre elles sont-elles justifiées? C'est ce que nous n'avons pas à examiner ici. Nous voulons seulement, nous plaçant en dehors de toute polémique, n'ayant en vue que l'intérêt scientifique, le seul dont on doive avoir souci, dire un mot de certaines réformes auxquelles on a songé récemment, réformes qui donneraient naissance à une nouvelle organisation de l'École; la neuvième, et, on peut ajouter, la dernière; car, selon toute vraisemblance, celle-ci ne résisterait pas longtemps à cette regrettable transformation. Faire, comme le rêvent certaines personnes, de l'École polytechnique, une école purement militaire, lui retirer le recrutement des services civils;

(*) *Histoire de l'École polytechnique*, par G. Pinet, ancien élève de l'École polytechnique. Librairie polytechnique, Baudry et Cie, un volume in-4° de 500 pages avec 16 gravures.

(**) Voyez *Journal*, 1893, p. 142.

(***) M. Pinet en compte *huit*, nombre relativement faible et qui prouve combien le point de départ avait été heureusement trouvé par les fondateurs.

ce n'est pas seulement découronner l'École, c'est la vouer à une mort certaine et prochaine. Tous ceux qui vivent au milieu de cette jeunesse qui ambitionne d'obtenir un jour le titre si envié, titre honorable et profitable tout à la fois à qui le porte, d'ancien élève de l'École polytechnique, savent que l'espoir de sortir dans les services civils est l'attraction prépondérante, la force maîtresse qui assure le bon recrutement de l'École. Si l'on supprime cette force, l'École polytechnique ne nous paraît plus avoir de raison d'être. Une section particulière des élèves de Saint-Cyr, soumise à un enseignement théorique et pratique, approprié à son but, la préparant au service des armes spéciales, suffira, amplement, au recrutement de l'artillerie et du génie.

Au nom de la science française qui ne peut que perdre à la disparition d'une école qui l'a toujours si fidèlement et si glorieusement servie, nous aimons à penser qu'il n'en sera pas ainsi. Elle restera, nous en formons le vœu bien sincère, au milieu d'une démocratie si directement intéressée aux progrès de la science, comme un refuge sûr et respecté, où le jeune homme, souvent sans fortune, épris des recherches désintéressées, pourra, à toute époque, venir s'abriter et se développer.

C'est un décret de la Convention, daté du 21 ventôse, an II (11 mars 1794), qui sous le nom d'*École Centrale des travaux publics* a fondé l'École Polytechnique. Dans quelques mois (*), cette École fêtera son centenaire. Ceux qui participeront à cette fête, les anciens et les jeunes, en reportant leur pensée sur toute cette gloire scientifique et militaire que, savants ou soldats, les nobles fils de l'École polytechnique ont, depuis un siècle, recueillie pour elle, pourront éprouver, avec la fière pensée de lui appartenir, une joie vraiment patriotique. Il n'en est pas de plus légitime quand elle n'est pas inspirée par une sotte et puérile vanité, quand elle ne découle pas surtout de cet esprit détestable qu'on définissait, récemment, « une fierté poussée jusqu'à l'orgueil le plus intransigeant avec le plus parfait mépris de tout ce qui lui est étranger » (**).

G. L.

BIBLIOGRAPHIE

Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité, par *Albert Quiquet*. — 1 brochure, in-8° raisin. Prix **3 francs**. L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

De grands mathématiciens, tels que De Moivre, Bernoulli, Lambert, etc., des actuaires de différentes nations, se sont préoccupés de représenter par une formule algébrique les tables de mortalité fournies par des statistiques directes. M. Quiquet s'est proposé de réunir les travaux qui ont été réalisés dans cet ordre d'idées et qui sont plus nombreux qu'on pourrait le croire. Sans parler des lois désormais classiques de Gompertz

(*) Nous croyons savoir que les fêtes du Centenaire auront lieu au Trocadéro, et qu'elles sont fixées au mois de mai ; elles dureront trois jours.

(**) Léo Claretie, *De l'Esprit normalien* (*Illustration*, p. 423, 18 novembre 1893).

et de Makeham, on trouvera dans cette brochure des renseignements puisés aux sources mêmes, c'est-à-dire dans les mémoires des Académies et des Sociétés Savantes, et un rapide résumé de la méthode suivie par chaque auteur; nous citerons entre autres un fort curieux rapport de Legendre, sur un manuscrit de Duvillard et sur la table célèbre de ce dernier.

Ce recueil ne s'est pas formé sans peine, et il a mérité déjà l'attention de spécialistes fort compétents, le Jury de l'Institut des Actuaires français.

Représentation algébrique des tables de survie et de mortalité. Généralisation des lois de Gompertz et de Makeham, par *Albert Quiquet.* — 1 volume in-8° raisin. Prix **4 francs.** L. Warnier et Cie, éditeurs, 30, rue Le Peletier, Paris.

C'est devant le Jury de l'Institut des Actuaires français que M. Quiquet a soutenu la thèse qui paraît aujourd'hui en brochure, et où il a reproduit, avec de notables développements, deux communications qu'il avait précédemment faites à l'Académie des Sciences. Ce travail, presque exclusivement mathématique, conduit à toute une série de formules propres à représenter les tables de survie ou de mortalité : les lois de Gompertz et de Makeham, et d'autres, moins connues, celles de Lazarus, de Janse, etc. n'en forment plus que de simples cas particuliers; leurs propriétés sont susceptibles d'une généralisation dont M. Quiquet fait rapidement entrevoir la portée, au sujet du calcul des annuités viagères, la base en quelque sorte des assurances sur la vie.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

Sous ce titre, nous nous proposons de donner des énoncés de questions, avec une indication sommaire de la solution.

Les première questions que nous allons traiter sont relatives à la parabole et à sa développée, soit que l'on considère cette dernière courbe comme dérivant de la parabole du second degré, soit que l'on considère la développée de parabole en elle-même, sous le nom de *parabole semi-cubique* (*).

Nous examinerons ensuite diverses questions relatives à l'ellipse et à l'hyperbole, ainsi qu'à certaines courbes célèbres telles que la strophoïde, la cissoïde, la lemniscate, la cycloïde, etc.

(*) On pourra d'ailleurs considérer ces premiers exercices comme la conséquence de notre article sur la parabole et sa développée, publié dans ce journal (*J. M. S.*, année 1893).

Ces diverses questions pourraient évidemment varier à l'infini. Nous nous sommes attaché à ne publier que des exercices que nous croyons *inédits,* et dont le résultat est toujours simple, de façon à être immédiatement utiles aux candidats.

QUESTIONS CONCERNANT LA PARABOLE OU SA DÉVELOPPÉE

1. — *La podaire de la développée d'une parabole* P, *relative au foyer de cette parabole* P, *est une parabole* P_1 *ayant son sommet au foyer de* P.

La parabole P ayant pour équation

(P) $$y^2 - 2px = 0,$$

l'équation d'une normale, de coefficient angulaire n, est

(1) $$y = n(x - p) - \frac{pn^3}{2}.$$

Celle de la perpendiculaire abaissée du foyer sur cette normale est

(2) $$ny + x - \frac{p}{2} = 0.$$

Résolvant (1) et (2) par rapport à x et à y, on trouve

$$x = \frac{p(1 + n^2)}{2}, \qquad y = -\frac{pn}{2}.$$

D'où, en éliminant n,

(P_1) $$y^2 = \frac{px}{2} - \frac{p^2}{4};$$

équation d'une parabole.

De cette propriété découlent immédiatement les deux suivantes :

1° *L'antipodaire d'une parabole, par rapport à son sommet, est une développée de parabole*, ou autrement dit :

Si, par un point quelconque d'une parabole, on mène une droite Δ *perpendiculaire à la droite qui joint ce point au sommet de la courbe, la droite* Δ *enveloppe une parabole semi-cubique ;*

2° *Le foyer d'une parabole est le sommet d'un triangle isoscèle dont les deux sommets correspondant aux angles égaux sont : le pied d'une normale quelconque à la parabole, et son point de rencontre avec l'axe.*

2. — *Les cordes d'une parabole* P, *telles que la droite joignant les centres de courbure des extrémités de la corde soit parallèle à la corde, enveloppent une parabole* P_1.

L'équation de la parabole P étant

(P) $$y^2 = 2px,$$

si y_1 et y_2 sont les ordonnées des extrémités d'une corde, son équation est

(1) $$2px - y(y_1 + y_2) + y_1y_2 = 0.$$

Les coordonnées (X_1, Y_1) (X_2, Y_2) des centres de courbure correspondant aux extrémités de la corde sont

(2) $$X_1 = \frac{3y_1^2}{2p} + p, \qquad Y_1 = -\frac{y_1^3}{p_2},$$

(3) $$X_2 = \frac{3y_2^2}{2p} + p, \qquad Y_2 = -\frac{y_2^3}{p_2}.$$

Le coefficient angulaire de la corde (1) est

$$\frac{2p}{y_1 + y_2},$$

celui de la droite joignant les centres de courbure (2) et (3) est

$$\frac{Y_1 - Y_2}{X_1 - X_2} = -\frac{2(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)}{3p(y_1 + y_2)}.$$

En égalant ces deux coefficients angulaires, on trouve la relation

(4) $$(y_1 + y_2)^2 - y_1y_2 + 3p^2 = 0.$$

En tenant compte de (4), (1) devient

$$(y_1 + y_2)^2 - y(y_1 + y_2) + 2px + 3p^2 = 0.$$

Sous cette forme $(y_1 + y_2)$ est un paramètre variable entrant au second degré. La droite (1) a donc, pour enveloppe, la courbe ayant pour équation

(P_1) $$y^2 - 4(2px + 3p^2) = 0.$$

C'est une parabole.

3. — *Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales sur une parabole semi-cubique, ces quatre normales forment un faisceau harmonique, est une parabole du second degré.*

Prenons l'équation de la parabole semi-cubique sous la forme

(1) $$y^2 = \frac{x^3}{k}.$$

En posant $y = tx$, on aura les coordonnées d'un point (x, y) sous forme unicursale :

(2) $$x = kt^2, \qquad y = kt^3.$$

L'équation d'une normale, au point de paramètre t, est

(3) $$2X + 3tY = 2kt^2 + 3kt^4.$$

Cette équation montre aussi que l'on peut abaisser quatre normales à la courbe, d'un point (X, Y). Le coefficient angulaire n de la normale (3) a pour expression

(4) $$n = -\frac{2}{3t}.$$

En éliminant t entre (3) et (4), on trouve

(5) $$27n^4X - 27n^3Y - 12n^2k - 8k = 0.$$

On sait que l'équation générale

$$An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E = 0$$

a ses racines en proportion harmonique, si l'on a la relation

$$\begin{vmatrix} A & -\frac{B}{4} & \frac{C}{6} \\ -\frac{B}{4} & \frac{C}{6} & -\frac{D}{4} \\ \frac{C}{6} & -\frac{D}{4} & E \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (5) aura donc ses quatre racines en proportion harmonique si l'on a

$$\begin{vmatrix} 27X & \frac{27Y}{4} & 1 \\ \frac{27Y}{4} & -2k & 0 \\ -2k & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

(6) $$27^2.Y^2 + 32.27kX + 16k^2 = 0.$$

Le lieu des points tels que les quatre normales abaissées de ces points forment un faisceau harmonique, est donc une parabole du second degré.

Si $2p$ désigne le paramètre de la parabole dont la courbe (1) est la développée, on a

$$k = \frac{27p}{8}.$$

L'équation (6) prend alors la forme plus simple

(7) $$Y^2 + 4pX + \frac{p^2}{4} = 0.$$

4. — *Le lieu des points tels qu'en abaissant les quatre normales sur une parabole semi-cubique, les droites joignant les pieds des normales au point de rebroussement, forment un faisceau harmonique, est une parabole du second degré.*

C'est l'équation du 4e degré en t, (3) de l'exercice précédent, qui doit avoir ses racines en proportion harmonique. On obtient ainsi

$$\begin{vmatrix} 3k & 0 & \frac{k}{3} \\ 0 & \frac{k}{3} & \frac{3Y}{4} \\ \frac{k}{3} & \frac{3Y}{4} & -2X \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire, la parabole ayant pour équation

$$\frac{27Y^2}{16} + 2kX + \frac{k^2}{27} = 0.$$

On retrouve ainsi l'équation (6). Cette parabole est donc la même que celle de l'exercice précédent.

Remarque. — De la comparaison des résultats des exercices 3 et 4, on déduit que :

Si les quatre normales abaissées d'un point sur une parabole semi-cubique forment un faisceau harmonique, les droites joignant les points de rebroussement de la courbe aux pieds des quatre normales forment aussi un faisceau harmonique.

(A suivre.)

EXERCICE ÉCRIT

76. — On considère les divers triangles formés par les extrémités d'une corde focale d'une parabole et son sommet.

1° Les lieux du centre de gravité, de l'orthocentre, du centre du cercle circonscrit à ces triangles se composent chacun d'une parabole;

2° Le lieu du centre du cercle inscrit et des cercles exinscrits aux mêmes triangles est une quartique. Construire cette courbe et y distinguer les parties qui correspondent à chacun de ces quatre cercles. *(Barisien.)*

Notes sur l'exercice 75 (*).

Soient (C) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ l'équation de la conique donnée et x_1, y_1, z_1, les coordonnées du point fixe. La polaire d'un point (X, Y, Z) du lieu rencontre cette conique (C) en deux points qui définissent avec les trois sommets du triangle une conique dont l'équation est:

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\left(\frac{Xx}{a}+\frac{Yy}{b}+\frac{Zz}{c}\right)(\lambda x+\mu y+z\nu)=0,$$

avec les conditions:

$$\lambda x+1=0,\qquad \mu y+1=0,\qquad \nu z+1=0.$$

Exprimons que cette conique passe par ce point fixe. Après élimination, on a pour le lieu la cubique:

$$\frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b}+\frac{z_1^2}{c}=\left(\frac{x_1x}{a}+\frac{y_1y}{b}+\frac{z_1z}{c}\right)\left(\frac{x_1}{x}+\frac{y_1}{y}+\frac{z_1}{z}\right).$$

Le cas singulier où $\frac{x_1^2}{a}+\frac{y_1^2}{b}+\frac{z_1^2}{c}=0$, établit la seconde proposition.

(*) Ces notes sont de M. Leinekugel qui avait proposé la question et qui, en me les adressant, observe, avec raison, que la marche suivie est naturelle. Pour démontrer qu'il existe un nombre donné de coniques assujetties à certaines conditions et à toucher une conique donnée, on généralise le problème; l'intersection du lieu trouvé et de la conique proposée donne, en chacun de ses points, une solution. Dans le présent problème, nous avons six solutions dans le premier cas; quatre, lorsque le point vient sur la conique.

QUESTION 343

Solution par Mme Ve F. Prime.

D'un point P *du plan d'une ellipse, on abaisse les quatre normales à l'ellipse dont les pieds sont* A, B, C, D. *Montrer que le lieu des points tels que le foyer* F *et le symétrique* P' *de* P *par rapport au centre soient sur une même conique que les pieds* A, B, C, D *est une ellipse* (E). *Cette ellipse* (E) *est semblable à l'ellipse donnée; elle a son centre au second foyer* F' *de l'ellipse donnée et elle passe par les sommets du petit axe de cette ellipse.*

(E.-N. Barisien.)

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point P et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse donnée.

Les points A, B, C, D étant situés sur l'hyperbole d'Apollonius

$$\frac{c^2}{a^2b^2}xy + \frac{y_1}{a^2}x - \frac{x_1}{b^2}y = 0,$$

l'équation générale des coniques menées par ces points peut s'écrire

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = \frac{c^2}{a^2b^2}xy + \frac{y_1}{a^2}x - \frac{x_1}{b^2}y;$$

on obtiendra donc le lieu du point P en éliminant λ entre les deux équations

$$\lambda\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 2\frac{c^2}{a^2b^2}x_1y_1, \qquad -\lambda b^2 = cy_1.$$

On trouve ainsi

$$\left(\frac{x + c}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2},$$

équation représentant une ellipse qui satisfait visiblement aux conditions de l'énoncé.

Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy, Warocquier, et Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand.

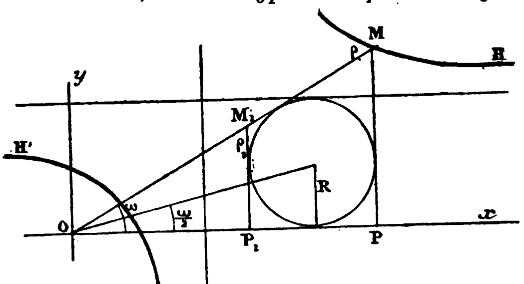
QUESTION 349

Solution par M. H. Brocard.

On considère une hyperbole équilatère H; *par l'un des foyers* F, *on mène* Δ *parallèle à l'une des asymptotes de* H. *D'un point* M, *mobile sur* H, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur* Δ.

Démontrer que le cercle inscrit au triangle FMP *a un rayon invariable.* (G. L.)

Pour établir cette propriété, il nous suffira de prouver que *le lieu géométrique des intersections des tangentes* OM *à des cercles de rayon constant roulant sur* OX, *par la tangente* MP *perpendiculaire à* OX, *est une hyperbole équilatère ayant* O *pour*



foyer, et admettant, pour l'une des asymptotes, une parallèle à OX.

Or, en prenant O pour pôle et OX pour axe polaire, on a immédiatement, suivant que le cercle O est inscrit ou exinscrit, les relations

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{R}{\rho\cos\omega \pm R}$$

qui se réduisent, en définitive, à

$$\rho = \frac{2R}{\sin\omega + \cos\omega - 1},$$

ou à

$$\rho_1 = \frac{2R}{\sin\omega + 1 - \cos\omega}.$$

Ces équations représentent des hyperboles équilatères

ayant O pour un des foyers et dont une des asymptotes est parallèle à OX.

Deuxième solution (*). — Soit $2xy - a^2 = 0$ l'équation de H, rapportée à ses asymptotes. Les coordonnées de F sont $x = a$, $y = a$. Prenons, pour représenter Δ, l'équation $x - a = 0$ et soient $x = a$, $y = m$, les coordonnées de P. Celles de M sont: $x = \frac{a^2}{2m}$, $y = m$.

On a donc $FP = m - a$, $PM = \frac{a(2m - a)}{2m}$.

On trouve facilement

$$MF = \frac{2m^2 - 2am + a^2}{2m},$$

et, par suite,
$$\frac{MF + PM - PF}{2} = \frac{a}{2}.$$

Or, $\frac{FP + PM - MF}{2}$ est le rayon du cercle *exinscrit* (**) au triangle MFP et situé dans l'angle F. Donc ce rayon est constant quand M parcourt H.

QUESTION 352

Solution par M. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

On donne une ellipse, un point P *qu'on joint aux foyers. Démontrer que les centres des sécantes communes au système des deux droites ainsi obtenues et à l'ellipse sont sur l'hyperbole d'Apollonius, du point* P. (Ch. Michel).

(*) Cette solution est de M. Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand.

(**) C'est le cercle exinscrit, ou le cercle inscrit, suivant que M est mobile sur la branche H', voisine du foyer considéré, ou sur la branche opposée H;

En prenant les axes indiqués par M. Brocard, on a, pour les coordonnées x, y de M :

$$x = r + r \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2}, \qquad y = x \operatorname{tg}\omega,$$

et, par élimination de ω,

$$(x - 2r)(y - 2r) = r^2$$

Les deux droites issues du point $P(\alpha, \beta)$ et passant par les foyers ont pour équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} y(\alpha - c) = \beta(x - c), \\ y(\alpha + c) = \beta(x + c). \end{cases}$$

Soient $M(x_0, y_0)$ un centre des sécantes communes et

$$(2) \qquad \begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0), \\ y - y_0 = m_1(x - x_0), \end{cases}$$

les équations de deux droites passant par ce point. Identifions l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des faisceaux (1) et (2) avec l'équation de l'ellipse, nous avons

$$[y(\alpha - c) - \beta(x - c)][y(\alpha + c) - \beta(x + c)]$$
$$+ \lambda[y - y_0 - m(x - x_0)][y - y_0 - m_1(x - x_0)] \equiv \mu(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2),$$

ce qui donne les relations

$$\alpha^2 - c^2 + \lambda = \mu a^2,$$
$$\beta^2 + mm_1\lambda = \mu b^2,$$
$$2\alpha\beta + (m + m_1)\lambda = 0,$$
$$2\beta c^2 - 2\lambda y_0 + (m + m_1)\lambda x_0 = 0,$$
$$(m + m_1)y_0 - 2mm_1x_0 = 0,$$
$$mm_1\lambda x_0^2 - (m + m_1)\lambda x_0 y_0 = \beta^2c^2 - \lambda y_0^2 - \mu a^2b^2.$$

Si nous éliminons mm_1, $m + m_1$ et λ entre ces six relations, il nous reste

$$\beta c^2 - \alpha\beta x_0 = (\mu a^2 - \alpha^2 + c^2)y_0,$$
$$- \alpha\beta y_0 = x_0(\mu b^2 - \beta^2),$$
$$x_0^2(\mu b^2 - \beta^2) + y_0^2(\mu a^2 - \alpha^2 + c^2) = \beta^2c^2 - \mu a^2b^2 - 2\alpha\beta x_0 y_0.$$

Pour éliminer μ entre ces équations, nous tirons μ de la seconde et nous portons dans la première, ce qui nous donne l'équation

$$(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 + b^2c^2)x_0y_0 + \alpha\beta b^2x_0^2 - a^2\alpha\beta y_0^2 - b^2c^2\beta x_0 = 0,$$

et enfin nous portons dans la troisième les valeurs de μ, $\mu a^2 - \alpha^2 + c^2$ et de $\mu b^2 - \beta^2$, tirées des deux premières, ce qui nous donne l'équation

$$c^2x_0y_0 - a^2\alpha y_0 + b^2\beta x_0 = 0.$$

Ces deux équations donnent x_0, y_0. Or la seconde n'est autre que l'équation de l'hyperbole d'Apollonius relative au point P, dans laquelle on a remplacé les coordonnées courantes par x_0, y_0.

Généralisation (*). — *On mène, d'un point* P, *les faisceaux de tangentes à une famille de coniques homofocales. Les centres des sécantes communes à ces faisceaux de tangentes et à une conique fixe* (C) *de la famille sont sur l'hyperbole d'Apollonius, du point* P, *relativement à la conique fixe.*

Soient P, P_1, P_2, les centres des sécantes communes. — D'après la construction, l'un des centres P_1 a même polaire PP_2 relativement au faisceau de tangentes, issues de P à la conique variable et à la conique fixe C, par suite au faisceau de tangentes issues de P à la conique fixe. Dès lors, le couple (PP_1, PP_2) est conjugué harmonique commun aux deux faisceaux de tangentes. En d'autres termes, ces deux droites sont les rayons doubles de l'involution formée par les faisceaux de tangentes issues de P aux coniques de la famille. Ces rayons doubles sont les tangentes en P à celles de ces coniques qui passent en P; ils sont donc rectangulaires; le point P_1 est tel que la perpendiculaire abaissée de P_1 sur sa polaire PP_2 relativement à la conique (C), passe par P. D'après une propriété connue, il appartient à l'hyperbole d'Apollonius, du point P, relativement à la conique (C).

En particulier, si nous prenons comme conique variable la conique formée par les foyers, nous obtenons la question proposée sous le n° 352.

Remarque. — On a un théorème analogue sur les quadriques homofocales.

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, professeur au collège de Falaise; Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand; E.-N. Barisien.

QUESTION 323

Solution par M. **J. Greenstreet** (M. A.).

Le centre d'un cercle bitangent à une conique, la projection d'un point quelconque de la conique sur la corde des contacts, et l'intersection de la normale en ce point, avec l'axe qui ne contient pas le centre du cercle, sont en ligne droite. (Tissot.)

(*) Cette généralisation est de M. Ch. Michel, qui avait proposé la question.

Soient PP′ la corde des contacts rencontrant le grand axe en N;

ψ, un point sur l'ellipse; ψM, perpendiculaire à PP′;

N, le point de rencontre de l'axe avec PP′;

C, le centre du cercle.

Traçons MQ qui rencontre le petit axe en g; et soit ψN′ la perpendiculaire abaissée de ψ sur le grand axe.

On a $$Cg = e^2MN \div (1 + e^2).$$

La normale en $\psi(x_1, y_1)$ qui a pour équation

$$a^2xx_1^{-1} - b^2yy_1^{-1} = a^2e^2;$$

elle coupe l'axe mineur en un point dont les coordonnées sont

$$o,\ e^2(e^2 - 1)^{-1};$$

c'est-à-dire au point g.

QUESTION 357 (430 par erreur.)

Solution par Mme Vve F. Prime.

On considère une développée de parabole et la perpendiculaire à l'axe menée par le sommet de la développée. D'un point fixe de cette perpendiculaire, on mène des sécantes qui rencontrent la développée en trois points. Montrer que le lieu du centre des moyennes distances de ces points d'intersection est une autre développée de parabole.

(E.-N. Barisien.)

Soit

(1) $$y^2 = ax^3$$

l'équation de la développée de la parabole de paramètre

$$2p = \frac{16}{27a}.$$

En désignant par α, l'angle que fait, avec l'axe ox, une sécante quelconque issue du point P (o, y_1), les rayons vecteurs, comptés à partir de P, des points d'intersection de cette sécante et de la développée (1) seront les racines de l'équation

$$a\rho^3 \cos^3 \alpha - \rho^2 \sin^2 \alpha - 2\rho y_1 \sin \alpha - y_1^2 = o.$$

Cette équation est du 3e degré, il y aura donc trois points d'intersection; et, en prenant P pour pôle, et la parallèle Px à ox, pour axe polaire, l'équation du lieu du centre des moyennes distances de ces trois points est

$$\rho = \frac{\sin^2 \alpha}{3a \cos^3 \alpha}.$$

Pour l'interpréter, rapportons la courbe à des coordonnées rectilignes PX, PY parallèles aux coordonnées primitives; elle devient

$$Y^2 = 3aX^3.$$

Le lieu cherché est donc une développée de parabole.

Nota. — Solutions diverses par MM. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; Waroquier; Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy.

QUESTIONS PROPOSÉES

383. — Soient A, B, C, D quatre points dans l'espace; sur AB, un point mobile M; sur CD, un autre point mobile N; on a

$$\frac{AM}{BM} = \frac{NC}{ND};$$

trouver le minimum de MN. *(E. Lemoine.)*

384. —Trouver les quartiques de troisième classe dont les développées sont aussi des quartiques de troisième classe. *(Delens.)*

385. — Soit P une parabole donnée, rapportée à ses axes. Considérons une parabole Q ayant pour sommet un point M, mobile sur P, passant par le sommet de P, et, en outre, ayant son axe perpendiculaire à celui de P.

Les paraboles P, Q se coupent en quatre points que l'on joint deux à deux; trouver le lieu décrit par le point de concours des cordes ainsi tracées. *(G. L.)*

ERRATA

1° page 5, les lignes de la 13° à la 20° inclusivement commençant par « Nous pouvons écrire... » et finissant par « $\lambda \sin z - Qrz + Q(r\theta - l) = o$ » doivent être reportées en tête de la page.

2° p. 120 (1893), l. 7 (en remontant), *au lieu de* l'axe AB, *lisez* l'arc AB, et p. 290, l. 6 (en remontant), *au lieu de* 380, *lisez* 382.

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 26768-11-93.

NOTICE NÉCROLOGIQUE

SUR E. CATALAN (*)

Au moment où paraissait le dernier numéro du *Journal*, je recevais, de mon ami Neuberg, une lettre m'annonçant que ma vieille amie madame Catalan se trouvait être à toute extrémité et que son mari, notre vénéré maître, malade lui-même, était dans un état de santé qui laissait peu d'espoir. Puis, coup sur coup, j'eus la douleur d'apprendre leur mort successive, survenue à deux jours d'intervalle (**).

Comme elle est étrange, combien elle est touchante cette mort qui, après une union de plus de cinquante ans, permet à ces deux vieillards de quitter la terre, sans que l'un ait eu conscience du mal qui frappait l'autre, presque à la même heure!

Si leur vie fut douloureusement traversée par des deuils cruels, si elle fut troublée par l'odieuse politique, on ne pouvait rêver pour eux une fin plus douce. Ils partent unis dans une mort presque simultanée, après l'avoir été si longtemps dans l'existence, tantôt douce, tantôt cruelle, qui fut la leur.

(*) Voici les titres qu'on pouvait lire sur la lettre qui faisait part de sa mort:

Eugène Catalan, né à Bruges, le 30 mai 1814, décédé à Liège, le 14 février 1894; professeur émérite à l'Université de Liège, ancien élève de l'école Polytechnique, associé de l'Académie royale de Belgique, de l'Académie des sciences de Toulouse et de la Société des sciences de Lille, correspondant des Académies de Saint-Pétersbourg, de Turin, des Nuovi Lincei; membre de la Société royale des Sciences de Liège, de la Société mathématique de France et de la Société philomatique de Paris, correspondant de la Société mathématique d'Amsterdam, de l'Institut national genevois, de la Société havraise d'études diverses et de la Société d'agriculture du la Marne; officier de l'Ordre de Léopold, chevalier de la Légion d'honneur.

(**) Mme Catalan est morte dans la soirée du 11 février; son mari s'est éteint doucement, dans l'ignorance de la mort de sa femme, le 14 février, à 6 heures du matin.

Il y a déjà longtemps que la belle carrière scientifique de Catalan a été louée, et dignement louée. L'hommage qu'elle mérite lui a été adressé, de son vivant même, dans l'éloquent discours (*) que M. Mansion, son collègue à l'Académie de Bruxelles, a prononcé, à Liège, le 7 décembre 1884, lorsque Catalan fut promu à l'*éméritat*, le suprême honneur auquel peuvent atteindre les membres de l'Université belge.

Faisant abstraction du savant, je veux ici, simplement, par quelques souvenirs anecdotiques et familiers, retracer certains traits de la physionomie si curieuse de l'homme dont l'amitié a grandement honoré ma modeste vie scientifique; je voudrais montrer le côté intime d'un caractère, l'un des plus intéressants et des plus attachants que j'ai connus, tel que je l'ai entrevu dans nos longues causeries, tel qu'il ressort à mes yeux de l'affectueuse correspondance que nous avons échangée depuis vingt ans.

Le caractère de Catalan, ne se dégageait pas immédiatement devant ceux qui s'approchaient de lui. Pour le connaître et pour l'apprécier, comme il méritait de l'être, il fallait, ce fut mon heureux destin et, certainement, celui de beaucoup d'autres, triompher quelque peu des impressions premières; mettre de côté, au besoin, certaines susceptibilités que pouvaient soulever des critiques dont il ne cherchait pas à émousser la pointe. Voici, à ce propos, un très petit fait dont je fus autrefois témoin; je peux le raconter aujourd'hui sans inconvénient. Il montrera bien, je crois, quel était, dans Catalan, le côté légèrement agressif; ce côté qui lui a été parfois reproché par ceux qui ne pouvaient savoir combien les questions de personnes étaient peu pour celui que l'intérêt scientifique, seul, a toujours préoccupé. Certains déboires, qui furent les siens, et dont il m'a quelquefois entretenu, déboires immérités, eurent peut-être pour origine et pour cause principale cette interprétation inexacte.

Il y a une dizaine d'années, me promenant, dans la cour du Collège de France, avec Catalan, je vis arriver Vazeille qui, à

(*) Ce discours a été reproduit dans le tome I des *Mélanges mathématiques* (Ed. de 1885).

cette époque, dirigeait avec moi le Journal. Catalan ne le connaissant pas, je les présentai l'un à l'autre. Mais la présentation n'était pas terminée que, fort surpris de l'effet que je venais de produire, j'entendis Catalan interpeller Vazeille, dans cette forme vive qui lui était familière, à propos d'un article sur l'involution que Vazeille avait fait paraître récemment. Assez confus et quelque peu gêné, je l'avoue, d'un incident que j'avais si peu prévu, je crus, devant la tournure que prenait la conversation, devoir m'écarter discrètement. Je sais seulement, pour l'avoir suivi de loin, que l'entretien fut long, et fort animé de part et d'autre. Le lendemain, ayant rencontré Vazeille, celui-ci, faisant allusion à la rencontre de la veille, me dit : « Ce père Catalan ! a-t-il dû se faire des ennemis dans sa vie ! » J'ai, plus d'une fois, songé au mot de Vazeille. Pourtant, je ne crois pas que Catalan ait eu des ennemis. Ceux qu'il a pu froisser, comme le fut Vazeille, dans l'entretien que je viens de rappeler, sans qu'il y ait eu de la part de Catalan l'ombre d'une préméditation, ont dû, plus tard, le premier mouvement d'humeur passé, lui pardonner la vivacité de certaines observations, en considération du but excellent qui les dictait. Si Vazeille vivait encore, je suis certain qu'il approuverait cette opinion, tout le premier. On peut dire, d'ailleurs, que si, comme en témoignent certains de ses écrits, Catalan a pu se montrer sévère pour quelques-uns, il a, en retour, été toujours accueillant aux nouveaux venus et indulgent, quelquefois trop, à leurs premières productions.

J'aurais voulu retracer quelques autres anecdotes qui auraient mis en lumière la véritable physionomie de cet homme, qui était vraiment excellent, mais que tous, parmi ceux qui l'ont plus ou moins fréquenté n'ont peut-être pas pu juger dans son intégrité. Les nécessités du journal m'obligent à abréger. Je désire, pourtant, rappeler les titres de la reconnaissance personnelle que je lui dois, avec beaucoup d'autres, comme directeur de ce journal.

Non seulement Catalan n'a cessé de collaborer au *Journal* par les articles et par les très intéressantes questions qu'il lui a donnés si libéralement (sans craindre de démériter, ainsi, au

point de vue scientifique, sentiment singulier, mais que j'ai été à même de constater quelquefois), en même temps que mon dévoué collaborateur et ami, H. Brocard, il poussait l'intérêt qu'il portait à cette publication jusqu'à corriger les épreuves de chaque numéro. Voici comment la chose s'était faite; car je n'eusse jamais songé, sans l'incident que je vais raconter, à lui imposer une pareille tâche.

Au Congrès de Nancy, il y a quelques années, me trouvant avec Catalan et causant du *Journal*, il me dit : « Longchamps, ton journal est plein de fautes typographiques. » Il s'agissait d'un numéro qui venait de paraître; j'en avais revu les épreuves avec un soin tout particulier et je lui manifestai mon étonnement de la critique qu'il m'adressait. Je lui demandai pourtant de me faire connaître, à son retour à Liège, les fautes qu'il avait rencontrées. Je reçus en effet une lettre de lui quelques jours après. Elle commençait ainsi : « Je t'ai promis de te signaler les fautes typographiques du dernier numéro de ton journal; je n'ai pas eu besoin d'aller bien loin : j'ouvre et, à la première page, je trouve deux virgules qui manquent; par compensation, il y en a une qui est en trop ». Du reste, ajoutait-il, « cela ne m'étonne pas, tu sais pourquoi ». Le *pourquoi* auquel il faisait allusion, on ne l'imaginerait pas facilement si je ne le révélais, c'est que l'éditeur de ce journal, par la volonté de ses parents, a pour prénom Napoléon. Catalan ne pouvait pas souffrir ce nom; les meilleurs esprits ont de ces faiblesses! Un éditeur, s'appelant Napoléon, ne pouvait rien faire de bon : c'était un axiome! Je n'ai jamais bien su s'il parlait sérieusement ou non, quand il s'exprimait ainsi. C'est qu'en effet la haine qu'il avait vouée aux Bonapartes n'était pas petite; il n'aimait pas à plaisanter sur ce sujet.

Quoi qu'il en soit, ne sachant comment lui donner satisfaction, je lui proposai un jour, un peu ennuyé de ses critiques répétées, de corriger lui-même ces épreuves auxquelles il trouvait toujours quelque reproche à faire. Je m'imaginais qu'il allait repousser fort loin ma proposition; aussi, fus-je très agréablement surpris de l'entendre me dire : « Mais,

Longchamps, je ne demande que cela depuis longtemps » ; et ajoutant à ma surprise, il me dit encore : « Tu ne sais pas combien j'adore corriger les épreuves ! » Catalan, celui des mathématiciens du siècle qui, si je ne me trompe, a le plus écrit (*), a dû, dans ce cas, être souvent heureux, et d'un bonheur qui n'est pas vulgaire. A ma connaissance, il est en effet le seul, parmi ceux que les circonstances ou les obligations professionnelles rendent correcteurs d'épreuves, qui l'ait si vivement goûté.

Cher et vénéré maître! les épreuves du numéro dernier sont probablement les dernières qu'il ait corrigées, après tant d'autres! Et quand le mal l'a frappé, dans une vieillesse si alerte qu'elle semblait à ses amis, heureux témoins de cette longévité, ne devoir jamais finir, a-t-il vu venir la dernière heure, celle qui précède l'éternel repos? Il a dû, dans tous les cas, je n'en doute pas, l'envisager avec cette sérénité, avec ce calme, reflets naturels d'une belle âme, lorsqu'elle peut contempler la mort qui vient la toucher avec la conscience d'une vie qui fut toujours noblement occupée. Peut-être, avec son dernier souffle, aurait-on pu l'entendre murmurer ces deux vers qu'il aimait à citer (**) et qui, je crois bien, ont constitué la seule prière de sa vie :

N'ayant pas fait de mal, ayant fait quelque bien,
Je suis prêt à partir, et ne redoute rien.

(*) Dans une brochure qui est le résumé de sa vie scientifique on peut lire l'énumération des principaux articles ou mémoires qu'il a publiés. Ils sont au nombre de 421 !

Le n° 1 a pour titre.

Questions proposées au concours général de 1833, composition qui lui a valu le prix d'honneur, et qui a été publiée dans un journal *le Géomètre*, publication qui a eu seulement quelques numéros.

Le n° 421 correspond à une brochure, citée plus bas, qui a eu deux éditions et qui est intitulée : *Miettes littéraires et politiques.*

(**) *Miettes littéraires et politiques*, par un vieux mathématicien, 1re éd., 1889, p. 95; 2e éd., 1892, p. 104.

LE CALCUL DES DIFFÉRENCES

ET LES FONCTIONS RÉCURRENTES

Par M. R. Gilbert.

1. — Étant donnée une formule de récurrence

$$u^n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_p u_{n-p}$$

dans laquelle $a_1, a_2, \dots a_p$ sont des fonctions de n, on se propose de calculer u_n en fonction de $n, a_1, a_2 \dots a_p$.

Considérons les deux formules

$$(1) \qquad u_n = a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2}$$

$$(2) \qquad v_n = x_n v_{n-1} + \frac{n-1}{A} x_n v_{n-2}$$

dans lesquelles a_n, b_n, x_n sont fonctions de n, A désigne une constante. Nous allons déterminer le cas où l'on a $v_n = \Delta^n u_0$.

Supposons qu'on ait vérifié, jusqu'à une certaine valeur de n, la relation $u_n = (v+1)^{(n)}$

et cherchons à quelles conditions on aura

$$u_{n+1} = (v+1)^{(n+1)}.$$

Or

$$u_{n-1} = x_{n+1}u_n + \frac{n}{A} x_{n+1} u_{n-1} + (a_{n+1} - x_{n+1})u_n + \left(b_{n+1} - \frac{n}{A} x_{n+1}\right) u_{n-1}.$$

La somme des deux premiers termes est le développement de

$$\sum_{p=0}^{n=p} C_n^p x_{n+1} v_{n-p} + \sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n-1}^p \frac{n}{A} x_{n-1} v_{n-p-1}$$

ou, d'après la formule (2),

$$\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \frac{x_{n+1}}{x_{n-p+1}} v_{n-p+1}.$$

Donc

$$u_{n+1} = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \frac{x_{n+1}}{x_{n-p+1}} v_{n-p+1} + (a_{n+1} - x_{n+1}) \sum_{p=0}^{p=n} C_n^{p-1} v_{n-p+1}$$
$$+ \left(b_{n+1} - \frac{n}{A} x_{n+1}\right) \sum_{p=0}^{p=n-1} C_{n-1}^{p-2} v_{n-p+1}.$$

Si l'on a $u_{n+1} = (v + 1)^{(n+1)}$, il faut que le coefficient de v_0 se réduise à l'unité et que le coefficient de v_{n-p+1} soit C_{n+1}^{p}, quel que soit p. La première condition donne

$$(3) \qquad a_{n+1} - x_{n+1} + b_{n+1} - \frac{n}{A} x_{n+1} = 1,$$

quel que soit n.

La seconde donne, quel que soit p,

$$C_n^p \frac{x_{n-1}}{x_{n-p+1}} + (a_{n+1} - x_{n+1}) C_n^{p-1} + \left(b_{n+1} - \frac{n}{A} x_{n+1}\right) C_{n-1}^{p-2} = C_{n+1}^p,$$

ou plus simplement,

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &(n - p + 1) \frac{x_{n+1}}{x_{n-p+}} - p x_{n+1}\left(1 - \frac{p-1}{A}\right) \\ &\qquad - (n+1) + \left[a'_{n+1} + (p-1)\frac{b_{n+1}}{n}\right] p = 0. \end{aligned} \right.$$

2. — Voici certains cas pour lesquels les égalités (3) et (4) sont vérifiées.

1° Faisons $x_n = B = c^{te}$; on trouve pour déterminer a_n et b_n, les égalités suivantes

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{B}{A} - \frac{b_{n+1}}{n} = 0, \\ &a_{n+1} - \frac{b_{n+1}}{n} - \left[1 + B\left(1 - \frac{1}{A}\right)\right] = 0; \end{aligned} \right.$$

ce qui donne

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_n &= B + 1, \\ b_n &= C(n - 1), \\ x_n &= B; \end{aligned} \right.$$

en posant $\frac{B}{A} = C$.

2° Faisons $x_n = \frac{B}{n + \alpha}$, B et α étant des constantes. On trouve pour a_n et b_n les valeurs suivantes, vérifiant (3) et (4)

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_n &= \frac{2n + B + \alpha - 1}{n + \alpha} \\ b_n &= \frac{(n-1)(C-1)}{n + \alpha} \end{aligned} \right.$$

en posant $\frac{B}{A} = C$.

3. — Ces relations permettent de résoudre plusieurs formules de récurrence à trois termes.

Considérons d'abord la formule

(7) $$u_n = au_{n-1} + b(n-1)u_{n-2}.$$

a et b étant des constantes.

Si l'on pose

(8) $$v_n = (a-1)v_{n-1} + b(n-1)v_{n-2},$$

il résulte, des formules (5) n° 1, que l'on a

$$u_n = (v+1)^{(n)}, \qquad \text{si } u_0 = v_0.$$

Considérons en particulier la relation

$$z_n = z_{n-1} + b'(n-1)z_{n-2}$$

laquelle est la relation (7) où $a = 1$,

et la relation

$$t_n = b'(n-1)t_{n-2}, \qquad \text{où} \qquad t_0 = z_0.$$

On aura

$$z_n = (t+1)^{(n)},$$

à condition que $t_1 = 0$ et par suite $t_{2p+1} = 0$.

De là il suit que

$$z_n = z_0 \left[1 + \frac{n(n-1)}{2} b' + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} b'^2 + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6} b'^3 + \ldots \right]$$

Ainsi la formule $z_n = z_{n-1} + b'(n-1)z_{n-2}$ est résolue.

En posant $a^n z_n = u_n$ on a :

$$u_n = au_{n-1} + a^2 b'(n-1)u_{n-2},$$

formule qu'on peut identifier avec (7) en faisant $b' = \frac{b}{a^2}$, ce qui donne, pour résoudre l'équation (7), la formule

$$u_n = u_0 \left[a^n + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4} a^{n-4}b^2 + \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6} a^{n-6}b^3 + \ldots \right]$$

4. *Application.* — Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $y = e^{x^2}$.

On a $$y' = 2xy,$$

d'où $$y^{(n+1)} = 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)}.$$

D'après la formule précédente :

$$y^{(n)} = y\left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} + \dots\right].$$

5. — Considérons la formule de récurrence

(8) $(n+\alpha)u_n = (2n + \alpha - 1)u_{n-1} + (c-1)(n-1)u_{n-2}.$

Il résulte, des formules (6) que si l'on pose

$$(n+\alpha)\,v_n = c(n-1)v_{n-2},$$

avec les conditions $v_0 = u_0$, $v_1 = 0$, on aura

$$u_n = (v+1)^{(n)}.$$

Ce qui donne :

$$u_n = u_0 \sum C_n^{2p} c^p \frac{1.3.5\,\dots\,(2p-1)}{(2+\alpha)(4+\alpha)\,\dots\,(2p+\alpha)}.$$

La formule (1) est donc résolue. On peut en déduire la solution de la relation

$$(n+\alpha)u_n = a(2n + \alpha - 1)u_{n-1} + b(n-1)u_{n-2},$$

où a et b sont des constantes; on opérera comme dans le numéro précédent.

6. — Ces résultats permettent de calculer les dérivées d'ordre n d'un certain nombre de fonctions. Soit, par exemple,

$$y = \text{arc}\sin x,$$

$$y' = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad y'' = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

ou

$$y''(1-x^2) - xy' = 0,$$

ce qui donne

$$y^{(n+2)}(1-x^2) - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0.$$

En posant $\dfrac{y^{(n+1)}}{n!} = u_n$, on est ramené à une formule qu'on sait résoudre.

7. — Si dans les formules (6) on fait $c = 1$, en supposant

$$(n+\alpha)u_n = (2n + B + \alpha - 1)\,u_{n-1} - (n-1)\,u_{n-2},$$
$$(n+\alpha)v_n = Bv_{n-1},$$

et si $u_0 = v_0$, on trouve $u_n = (v+1)^{(n)}$, et, par suite

(9) $$u_n = u_0 \sum C_n^p B^p \frac{1}{(1+\alpha)(2+\alpha)\,\dots\,(p+\alpha)}.$$

On déduit de là la solution de l'équation

$$(n+\alpha)u_n = a(2n + B + a - 1)u_{n-1} - a^2(n-1)u_{n-2}.$$

REMARQUE. — Dans la formule (9) on suppose que α n'est pas un entier négatif; car supposons, par exemple, $a = -1$, si l'on fait $n = 1$ dans la relation de récurrence, on trouve $u_0 = 0$ et alors u_n est de la forme $\frac{0}{0}$.

Dans ce cas, on prendra, pour valeur initiale des u, la valeur u_1 et pour que la relation $u_n = (v + 1)^{(n)}$ soit exacte, on prendra aussi $v_1 = u_1 - u_0 = u_1$; la forme de u_n deviendra

$$u_n = u_1 \sum C_n^p B^{p-1} \frac{1}{(2 + \alpha)(3 + \alpha) \dots (n + \alpha)}.$$

8. *Application.* — Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $y = e^{\frac{1}{x}}$.

Si l'on pose $y^{(n)} = \frac{(-1)^n P_n y}{x^{2n}(n-1)!}$ on trouve

$$(n - 1)P_n = [2(n - 1)x + 1] P_{n-1} - (n - 1)x^2 P_{n-2},$$

ce qui, d'après les formules précédentes, donne

$$P_n = \frac{1}{(n-1)!} + C_n^1 \frac{x}{(n-2)!} + \dots + C_n^p \frac{x^p}{(n-p-1)!} + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1}.$$

Il résulte du théorème de Sturm que ce polynôme, égalé à zéro, a toutes ses racines réelles.

9. — Proposons-nous de résoudre successivement les deux formules de récurrence

(10) $(n + \alpha)u_n = (an + b)u_{n-1} + c(n - 1)u_{n-2}, \quad (a \neq 0)$

(11) $(n + \alpha)u_n = bu_{n-1} + c(n - 1)u_{n-2}.$

La formule (1) peut se ramener à la forme

$$(n + \alpha)z_n = (2n + B + \alpha - 1)z_{n-1} + (C - 1)(n - 1)u_{n-2},$$

en posant $z_n = \lambda^n u_n$ et en déterminant λ, B et C par les relations

$$\begin{cases} \dfrac{2}{\lambda} = a, \\ \dfrac{B + \alpha - 1}{\lambda} = b, \\ \dfrac{C - 1}{\lambda^2} = c. \end{cases}$$

Considérons alors les formules de récurrence

(12) $(n+\alpha)u_n = (2n+B+\alpha-1)u_{n-1}+(C-1)(n-1)u_{n-2}$,

(13) $(n+\alpha)v_n = Bv_{n-1}+C(n-1)v_{n-2}$.

Des formules (6) nº 1, il résulte que si $u_0 = v_0$, on a

$$u_n = (v+1)^{(n)}, \qquad \text{ou} \qquad v_n = (u-1)^{(n)}.$$

La formule (4) où $C = 1$ est

(14) $$(n+\alpha)z_n = B'z_{n-1}+(n-1)z_{n-2}.$$

On sait la résoudre, car (3) devient

$$(n+\alpha)u_n = (2n+B+\alpha-1)u_{n-1}.$$

Posons $$z_n = \frac{v_n}{\lambda^n};$$

on en déduit

(15) $$(n+\alpha)v_n = B'\lambda v_{n-1}+(n-1)\lambda^2 v_{n-2}.$$

On peut identifier (13) et (15) car on a pour déterminer B′ et λ les relations

$$\begin{cases} B'\lambda = B, \\ \lambda^2 = C. \end{cases}$$

Il suffit donc de résoudre (14) pour que (13) soit résolue. Or si l'on pose avec $t_0 = z_0$

$$(n+\alpha)t_n = (2n+B'+\alpha-1)t_{n-1},$$

on a $$v_n = \lambda^n z_n = \lambda^n(t-1)^{(n)}.$$

Ainsi l'équation (13) est résolue.

Reste la formule (12). Or on vient de voir que

$$v_n = \lambda^n(t-1)^{(n)}.$$

D'autre part $$v_n = (u-1)^{(n)}.$$

Donc pour calculer u_n on a l'identité symbolique

$$(u-1)^{(n)} = \lambda^n(t-1)^{(n)}.$$

On en déduit $$\left(\frac{u}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\right)^{(n)} = (t-1)^{(n)}, \; (*)$$

et $$\frac{u_n}{\lambda^n} = \left(t-1+\frac{1}{\lambda}\right)^{(n)},$$

ou enfin $$u_n = \lambda^n\left[t-\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{(n)};$$

formule qui donne u_n.

(*) Au sujet de cette transformation, voir E. Lucas, *Théorie des nombres;* première partie, chapitre XIII, p. 205 et suivantes.

Comme application, on peut calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $y = e^{\text{arc tg } x}$.

10. — Généralisation des résultats du n° 1.

Considérons une formule de récurrence d'un nombre quelconque de termes

$$u_n = a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2} + \ldots + l_n u_{n-q},$$

et la formule

$$v_n = x_n v_{n-1} + \frac{n-1}{A_1} x_n v_{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{A_{q-1}} x_n v_{n-q}.$$

En suivant la même marche qu'au n° 1, on trouve que si $u_0 = v_0$ on a

$$u_n = (v+1)^{(n)},$$

lorsque

$$a_n - x_n + b_n - \frac{n-1}{A_1} x_n + \ldots + l_n - \frac{n(n+1)\ldots(n-q+1)}{A_{q-1}} = 1,$$

en même temps que (quel que soit p)

$$\frac{(n-p+1)(x_{n+1})}{x_{n-p+1}} - p x_{n+1}\left[1 + \frac{p-1}{A_1} + \frac{(p-1)(p-2)}{A_2} + \ldots + \frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{A_{q-1}}\right]$$

$$= n+1-p\left[a_{n+1} + b_{n+1}\frac{p-1}{n} + c_{n+1}\frac{(p-1)(p-2)}{n(n-1)} + \ldots + l_{n+1}\frac{(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{n(n-1)\ldots(n-q+2)}\right]$$

et l'on vérifie que l'on peut faire

$$x_n = \frac{k}{(n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\ldots(n+\alpha_h)},$$

h étant l'un quelconque des nombres $0, 1, 2 \ldots (q-1)$.

Exemple. — Résoudre l'équation

(16) $u_n = au_{n-1} + b(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)u_{n-q}$.

Si l'on pose

$$v_n = (a-1)v_{n-1} + b(n-1)(n-2)\ldots(n-q+1)v_{n-q}$$

avec $v_0 = u_0$,

$$v_1 = v_2 \ldots = v_{q-1} = 0,$$

on a

$$u_n = (v + 1)^{(n)}.$$

On déduit de là la solution de (16)

$$u_n = u_0 \left[a^n + A_n^q \frac{b}{q} a^{n-q} + \frac{A_n^{2q}}{2!} \left(\frac{b}{q}\right)^2 a^{n-2q} + \ldots + \frac{A_n^{pq}}{p!} \left(\frac{b}{q}\right)^p a^{n-pq} + \ldots \right],$$

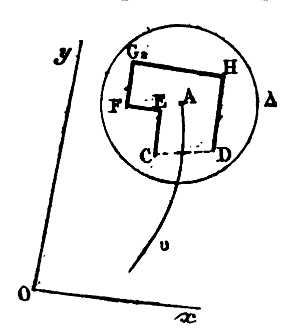
A_n^p désignant le nombre des arrangements de n lettres p à p.

LE POINT D'ARRÊT ET LE POINT ANGULEUX

Par M. **Sartre**, élève au lycée Henri IV.

1° *Il n'y a pas de point d'arrêt dans les courbes algébriques.*

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique U mise sous forme entière et rationnelle. Supposons que cette courbe admette un point d'arrêt A. Du point A, comme centre, décrivons une circonférence Δ de rayon assez petit pour qu'elle ne coupe la courbe qu'en un seul point B; ce qui est possible, si A est un point d'arrêt. Considérons deux points C et D, de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) de part et d'autre de la branche AB, à l'intérieur de Δ et tels que CD coupe la courbe. Par C, traçons une parallèle à Oy, CE; la fonction $f(x_0, y)$ varie d'une façon continue, quand on se déplace sur la droite CE, en conservant un signe constant, si l'on suppose CE assez petite pour qu'elle ne coupe pas U. A partir de E déplaçons-nous sur une parallèle à Ox, et ainsi de suite, de façon à former un contour polygonal CEFGHD entièrement contenu dans le cercle Δ, allant de C en D, sans traverser U (*). Alors on a



$$(1) \qquad f(x_0, y_0) \quad f(x_1, y_1) > 0.$$

(*) Comme je l'ai fait observer au jeune auteur de cette démonstration intéressante, le plus simple est d'imaginer le contour circulaire concentrique à Δ, passant de C en D sans traverser la courbe. La possibilité du contour polygonal en question n'est pas alors discutable. *G. L.*

D'ailleurs le segment CD ne rencontrant U qu'en un point réel, on aurait

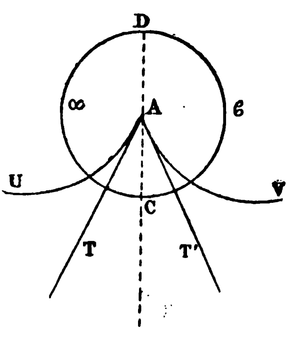
(2) $$f(x_0, y_0) \quad f(x_1, y_1) < 0.$$

Les inégalités (1), (2) sont contradictoires; donc...

Le même raisonnement s'applique au cas où un nombre impair de branches de la courbe aboutissent en un point.

2° *Il n'y a pas de point anguleux dans les courbes algébriques.*

Il faut montrer qu'un point double A ne peut pas être constitué par deux bras AU, AV, ayant des tangentes distinctes AT, AT'.



Prenons des axes tels que la parallèle à Oy, menée par A, soit comprise dans l'intérieur de l'angle TAT'. Prenons sur cette droite, de part et d'autre de A, deux points $C(x_0, y_1)$, $D(x_0, y_2)$. En se déplaçant sur CD, de C en D, comme $y = y_0$ est racine d'ordre pair de multiplicité de $f(x_0, y) = 0$, on voit que l'on a

$$f(x_0, y_1) \quad f(x_0, y_2) > 0.$$

Mais on peut aller de C en D par un contour polygonal ne traversant qu'une branche de courbe, alors on aurait

$$f(x_0, y_1) \quad f(x_0, y_2) < 0, \text{ etc.}$$

Remarque. — Nous avons supposé, pour plus de précision, que A était un point double; la démonstration est la même pour un point anguleux quelconque. La définition de ce point, qui offre quelque délicatesse, résulte de ce fait même qu'en allant de C en D, en passant par le point A, si p est la multiplicité de A, en allant de C en D, par les chemins CαD, CβD, on doit, dans l'un et l'autre cas, couper un nombre de bras de courbe dont la parité est la même que celle de p.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

5. — *Si, d'un point* P, *du plan d'une développée de parabole (ou parabole semi-cubique), on mène trois tangentes à la courbe, chacune de ces tangentes rencontre la courbe en un autre point. Les tangentes en ces seconds points d'intersection concourent en un même point* Q.

Soit
$$ky^2 = x^3,$$
l'équation de la parabole semi-cubique. En posant $y = tx$, on a pour les coordonnées unicursales d'un point de la courbe
$$\begin{cases} x = kt^2, \\ y = kt^3. \end{cases}$$
La tangente en un point, de paramètre t, a pour équation
$$\frac{X - kt^2}{2kt} = \frac{Y - kt^3}{3kt^2},$$
ou

(1) $$3tX - 2Y = kt^3.$$

Donc, si d'un point $P(\alpha, \beta)$ on mène les trois tangentes à la courbe, les paramètres des points de contact sont fournis par l'équation

(2) $$kt^3 - 3t\alpha + 2\beta = 0.$$

Si le point (XY) est sur la courbe, on a
$$X = km^2$$
$$Y = km^3.$$
En portant ces valeurs dans (1), on obtient
$$t^3 - 3tm^2 + 2m^3 = 0,$$
équation qui peut s'écrire
$$(t - m)^2(t + 2m) = 0.$$
La valeur $t = m$ correspond au point de contact. L'autre valeur $t = -2m$ correspond au point de contact de la troisième tangente. Donc, le coefficient m_1 relatif au point d'intersection de la tangente t_1 est
$$m_1 = -\frac{t_1}{2}.$$
De même
$$m_2 = -\frac{t_2}{2}, \qquad m_3 = -\frac{t_3}{2}.$$
Je dis que les trois tangentes aux points de coefficients m_1, m_2, m_3 concourent en un même point Q de coordonnées α' et β'.

En effet, voyons si on peut avoir
$$km^3 - 3m\alpha' + 2\beta' = 0,$$
ou, comme $m = -\frac{t}{2}$,

(3) $$kt^3 - 12\alpha' t - 16\beta' = 0.$$

(4) Or, en posant $\alpha' = \frac{\alpha}{4}, \qquad \beta' = -\frac{\beta}{8},$

les équations (2) et (3) sont identiques. Par conséquent, les tangentes aux trois points $m_1\, m_2\, m_3$ concourent bien au point (α', β').

6. — *Si, d'un point du plan d'une développée de parabole (ou parabole semi-cubique), on lui mène trois tangentes, trouver le lieu de ces points tels que les centres de courbure relatifs aux trois points de contact soient en ligne droite.*

Soient (α, β) les coordonnées du point du plan et $t_1\, t_2\, t_3$ les coefficients relatifs aux points de contact des trois tangentes issues de (α, β).

Les coordonnées d'un des points de contact sont

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = kt_1^2, \\ y_1 = kt_1^3. \end{array}\right.$$

On sait que les coordonnées X_1 et Y_1 du centre de courbure relatif à ce point sont données par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = x_1 - \dfrac{y'_1(x_1'^2 + y_1'^2)}{x'_1y''_1 - y'_1x''_1}, \\ Y_1 = y_1 + \dfrac{x'_1(x_1'^2 + y_1'^2)}{x'_1y''_1 - y'_1x''_1}, \end{array}\right.$$

x'_1 et x''_1 désignant les dérivées première et seconde de x_1 par rapport à t_1.

$$x'_1 = 2kt_1, \qquad x''_1 = 2k,$$
$$y'_1 = 3kt_1^2, \qquad y''_1 = 6kt_1.$$

On trouve alors

$$\left\{\begin{array}{l} X_1 = -\dfrac{k}{2}(9t_1^4 + 2t_1^2), \\ Y_1 = \dfrac{4k}{3}(3t_1^3 + t_1). \end{array}\right.$$

Exprimons que ces trois centres de courbure sont en ligne droite, c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 9t_1^4 + 2t_1^2 & 3t_1^3 + t_1 & 1 \\ 9t_2^4 + 2t_2^2 & 3t_2^3 + t_2 & 1 \\ 9t_3^4 + 2t_3^2 & 3t_3^3 + t_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En retranchant les deux dernières lignes de la première, on peut écrire le déterminant de la façon suivante

$$\begin{vmatrix} 9t_1^4 + 2t_1^2 & 3t_1^3 + t_1 & 1 \\ 9(t_1^4 - t_2^4) + 2(t_1^2 - t_2^2) & 3(t_1^3 - t_2^3) + t_1 - t_2 & 0 \\ 9(t_1^4 - t_3^4) + 2(t_1^2 - t_3^2) & 3(t_1^3 - t_3^3) + t_1 - t_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après avoir divisé par les facteurs $(t_1 - t_2)$ et $(t_1 - t_3)$,

$$\begin{vmatrix} 9(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2) + 2(t_1 + t_2) & 3(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2) + 1 \\ 9(t_1 + t_3)(t_1^2 + t_3^2) + 2(t_1 + t_3) & 3(t_1^2 + t_3^2 + t_1t_3) + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on trouve

$$\left|\begin{matrix} 27[(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2)(t_1^2 + t_3^2 + t_1t_3) - (t_1 + t_3)(t_1^2 + t_3^2)(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2)] \\ + 6[(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_3^2 + t_1t_3) - (t_1 + t_3)(t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2)] \\ + 9[(t_1 + t_2)(t_2^1 + t_2^2) - (t_1 + t_3)(t_1^2 + t_3^2)] + 2(t_2 - t_3) \end{matrix}\right| = 0.$$

Après avoir fait disparaître le facteur $(t_2 - t_3)$, cette relation se réduit à

$$(1) \qquad 27[t_1t_2t_3 . \Sigma t_1 + \Sigma t_1^2 t_2^2] - 6\Sigma t_1t_2 + 9[\Sigma t_1^2 + \Sigma t_1t_2] + 2 = 0.$$

Or, nous savons que les coefficients t_1, t_2, t_3 sont les racines de l'équation

$$kt^3 - 3t\alpha + 2\beta = 0.$$

Donc $\qquad \Sigma t_1 = 0, \quad \Sigma t_1t_2 = -\dfrac{3\alpha}{k}, \quad t_1t_2t_3 = -\dfrac{2\beta}{k}.$

On en déduit

$$\Sigma t_1^2 t_2^2 = (\Sigma t_1t_2)^2 - 2t_1t_2t_3 . \Sigma t_1 = (\Sigma \overline{t_1t_2})^2,$$
$$\Sigma t_1^2 = (\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_1t_2 = -2\Sigma(t_1t_2).$$

La relation (1) devient alors

$$27(\Sigma t_1t_2)^2 - 15\Sigma t_1t_2 + 2 = 0,$$

ou

$$(9\Sigma t_1t_2 - 2)(3\Sigma t_1t_2 - 1) = 0.$$

Or, $\Sigma t_1t_2 = -\dfrac{3\alpha}{k}$; le lieu des points (α, β) se compose donc des deux droites

$$\left(\alpha + \frac{2k}{27}\right)\left(\alpha + \frac{k}{9}\right) = 0.$$

Ce sont deux droites perpendiculaires à l'axe de la courbe. Mais il convient de remarquer que deux des tangentes issues des points de ces droites sont imaginaires ; par conséquent, deux des centres de courbure imaginaires sont en ligne droite avec le troisième centre réel.

La relation (1) permet de résoudre aussi la question suivante :

7. — *Les droites telles qu'en coupant une développée de parabole par ces droites, les trois centres de courbure des points d'intersection soient en ligne droite, enveloppent une parabole.*

Soit

$$(2) \qquad ux + vy = 1,$$

l'équation d'une droite. En y faisant $x = kt^2$ $y = kt^3$, on a pour l'équation donnant les valeurs de t relatives aux points d'intersection de cette droite avec la développée

$$vkt^3 + ukt^2 - 1 = 0.$$

Donc $\qquad \Sigma t_1 = -\dfrac{u}{v}, \quad \Sigma t_1t_2 = 0, \quad t_1t_2t_3 = \dfrac{1}{vk},$

$$\Sigma t_1^2 = (\Sigma t_1)^2, \quad \Sigma t_1^2 t_2^2 = -2t_1t_2t_3 . \Sigma t_1.$$

La relation (1) devient alors

$$-27t_1t_2t_3\Sigma t_1 + 9\Sigma t_1^2 + 2 = 0,$$

ou

$$(3) \qquad 9u^2 + 2v^2 + \frac{27u}{k} = 0.$$

Eliminons v entre (2) et (3), il vient

$$u^2(9y^2 + 2x^2) + u\left(\frac{27y^2}{k} - 4x\right) + 2 = 0.$$

En exprimant que l'équation en u a une racine double, on a immédiatement, pour l'équation de l'enveloppe,

$$\left(\frac{27y^2}{k} - 4x\right)^2 - 8(9y^2 + 2x^2) = 0,$$

ou

$$81y^2 = 24kx + 8k^2.$$

C'est une parabole du second degré.

EXERCICE ÉCRIT

77. — 1° On donne une ellipse Γ rapportée à ses axes; d'un point M on mène les normales à Γ. Trouver le lieu de M, sachant que les pieds des normales appartiennent à une conique ayant le centre de Γ pour foyer.

2° On donne trois axes rectangulaires ox, oy, oz. Sur oz un point fixe S, de cote h. Dans le plan yox, on considère une ellipse Γ, rapportée à ses axes. D'un point M, pris dans le plan yox, on mène les normales à la courbe. On demande le lieu de M, sachant que le cône, de sommet S, de base Γ, est de révolution.

3° Rapprocher et expliquer les résultats trouvés.

Notes sur l'exercice 76 (*).

Soient F le foyer de la parabole, O son sommet et A et B les extrémités d'une corde focale. L'équation de la corde AB peut s'écrire

$$y = m\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

1° *Lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* ABO. — L'équation du cercle circonscrit au triangle ABO est

(1) $$\lambda(y^2 - 2px) + \left[y - mx + \frac{mp}{2}\right](y + mx) = 0,$$

avec la condition $\lambda = -(1 + m^2)$.

L'équation (1) devient donc, en fonction du seul paramètre variable m,

(2) $$m^2(x^2 + y^2) - \frac{p}{2}(5m^2 + 4)x - \frac{mp}{2}y = 0.$$

Les équations du centre de (2) sont

(3) $$4m^2x = p(5m^2 + 4).$$

(4) $$4my = p.$$

En éliminant m entre ces deux équations, on trouve pour le lieu du centre du cercle circonscrit

$$64y^2 = p(4x - 5p).$$

C'est une parabole.

(*) Ces notes sont de M. Barisien qui avait proposé l'exercice 76.

On peut remarquer, en passant, que le cercle (2) enveloppe la cubique d'équation

$$y^2 = \frac{16x^2(5p - 2x)}{32x + p}.$$

2° *Lieu du centre de gravité du triangle* ABC. — En éliminant y entre les deux équations

$$y^2 = 2px,$$
$$y = m\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

on obtient l'équation

$$4m^2x^2 - 4p(m^2 + 2)x + p^2m^2 = 0$$

qui donne les abscisses des points A et B. De sorte que l'on a, en désignant par (x_1, y_1) (x_2, y_2) les coordonnées des points A et B

$$x_1 + x_2 = \frac{p(m^2 + 2)}{m^2} \qquad x_1x_2 = \frac{p^2}{4},$$

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{m} \qquad y_1y_2 = -p^2.$$

Les coordonnées du centre de gravité G sont donc

(5) $$X_G = \frac{x_1 + x}{3} = \frac{p(m^2 + 2)}{3m^2},$$

(6) $$Y_G = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{2p}{3m}.$$

Si on élimine m entre (5) et (6), on trouve, après avoir supprimé l'indice G, l'équation d'une parabole

$$9Y^2 = 2p(3X - p).$$

3° *Lieu de l'orthocentre du triangle* ABO. — On sait que si C est centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité et H l'orthocentre d'un même triangle, ces trois points sont en ligne droite et l'on a

$$CG = \frac{1}{2} HG.$$

Par conséquent $X_G - X_H = 2 (X_C - X_G)$

D'où

(7) $$X_H = 3X_G - 2X_C.$$

On a, de même,

(8) $$Y_H = 3Y_G - 2Y_C.$$

Or, les coordonnées de G sont données par (5) et (6) : celles de C, tirées de (3) et (4), sont

$$X_C = \frac{p(5m^2 + 4)}{4m^2} \qquad Y_C = \frac{p}{4m}.$$

En portant ces valeurs dans (7) et (8), on trouve

(9) $$X_H = -\frac{3p}{2} \qquad Y_H = \frac{3p}{2m}.$$

Le lieu de l'orthocentre est donc la droite (*) dont l'équation est

$$x = -\frac{3p}{2}.$$

(*) C'est par erreur que nous avions annoncé (p. 41) une parabole pour le lieu de l'orthocentre.

4° *Lieu du point de rencontre des bissectrices du triangle* ABO. — Les équations des trois côtés OA, OB et AB du triangle ABO sont respectivement

$$2px - yy_1 = 0,$$
$$2px - yy_2 = 0,$$
$$y - m\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Exprimons que les distances d'un point du plan à ces droites sont égales entre elles. On a

$$(10) \qquad \frac{2px - yy_1}{\sqrt{y_1^2 + 4p^2}} = \frac{2px - yy_2}{\sqrt{y_2^2 + 4p^2}} = \frac{y - m\left(x - \frac{p}{2}\right)}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Il faudrait remplacer y_1 et y_2 par leurs valeurs en fonction de m et éliminer m entre les deux équations formées par l'égalité de ces trois rapports. Le calcul ainsi conduit serait impraticable.

Elevons au carré les rapports (10) et ajoutons ou retranchons les numérateurs et les dénominateurs des deux premiers rapports élevés au carré; on peut remplacer le système (10) par le suivant :

$$(11) \qquad \frac{8p^2x^2 - 4p(y_1+y_2)xy + (y_1^2+y_2^2)y^2}{y_1^2+y_2^2+8p^2} = \frac{y^2(y_1+y_2) - 4pxy}{y_1+y_2} = \frac{\left[y - m\left(x - \frac{p}{2}\right)\right]^2}{1+m^2}.$$

En remplaçant $(y_1 + y_2)$ et y_1y_2 par leurs valeurs en fonction de m, les système (11) devient

$$(12) \qquad \frac{(4x^2+y^2)m^2 - 4mxy + 2y^2}{5m^2+2} = \frac{y^2 - 2mxy}{1} = \frac{y^2 - 2my\left(x - \frac{p}{2}\right) + m^2\left(x - \frac{p}{2}\right)^2}{1+m^2}.$$

Il faut maintenant éliminer m entre les deux équations (12).

Or, l'ensemble des deux premiers rapports et des deux derniers rapports se réduit aux deux équations

$$(13) \qquad 4(x^2 + y^2) = 5(y^2 - 2mxy),$$

$$(14) \qquad py + m\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = m(y^2 - 2mxy).$$

L'élimination de m entre (13) et (14) est alors très facile. Mais on peut encore la simplifier en divisant (13) et (14) membre à membre. On a alors l'équation

$$(15) \qquad 4m(x^2 + y^2) = 5\left[py + m\left(x - \frac{p}{2}\right)^2\right]$$

Les deux équations (13) et (15) étant du premier degré en m, l'élimination se fait alors fort simplement. On trouve pour l'équation du lieu

$$(16) \quad 4(x^2 - y^2)^2 - 20px(x^2 - y^2) - 50pxy^2 + 5p^2(x^2 - y^2) = 0.$$

C'est une quartique ayant un point double au sommet de la parabole. Elle rencontre l'axe de la parabole aux deux points P et Q pour lesquels

$$OP = \frac{p}{2}(5 - 2\sqrt{5})$$

$$OQ = \frac{p}{2}(5 + 2\sqrt{5}).$$

Elle rencontre la tangente au sommet en deux points R et R′ tels que

$$OR = \frac{p\sqrt{5}}{2}, \qquad OR' = -\frac{p\sqrt{5}}{2}.$$

Entre les deux points O et P, la courbe forme une boucle qui se continue par deux branches paraboliques extérieures à la parabole.

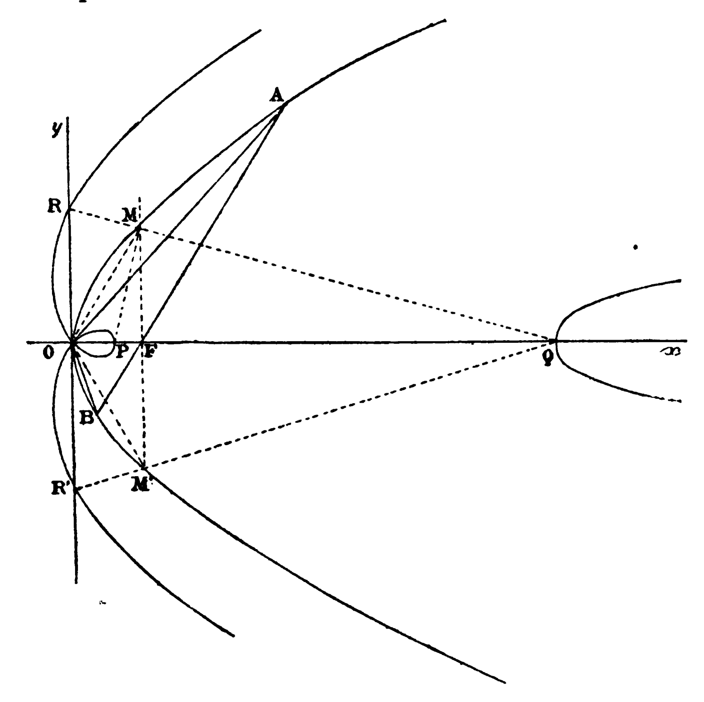
A partir du point Q comme sommet, la courbe a une branche intérieure à la parabole, et de forme parabolique.

En étudiant géométriquement, sur la figure, la façon dont les divers centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits se déplacent, on voit que :

1° La boucle OP correspond au centre du cercle inscrit;

2° Les arcs OR et OR′ correspondent au centre du cercle exinscrit au plus petit des angles A et B.

3° Les portions de la même branche de courbe situées entre R′ et l'∞



et R et l'∞ correspondent au centre du cercle exinscrit au plus grand des angles A et B.

4° Toute la branche parabolique dont Q est le sommet correspond au cercle exinscrit dans l'angle O.

Nota. — A propos de l'exercice 74 (V. p. 21), on peut observer que :

1° Le cercle C est la limite du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole, lorsque les trois tangentes se réunissent en une seule;

2° Le cercle C a son rayon de courbure égal au quart de rayon de la parabole au point de contact;

3° La seconde sécante d'intersection du cercle C avec la parabole passe par un point fixe.

QUESTION 235

Solution par M. Goulard, professeur au lycée de Marseille.

La quantité $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}$$
n'est pas égale à un nombre entier. (Catalan.)

Posons $$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}.$$

Soit 2^α la plus haute puissance de 2 contenue dans n, c'est-à-dire telle que l'on ait $2^\alpha \leqslant n < 2^{\alpha+1}$.

En réduisant toutes les fractions qui composent S_n au plus petit dénominateur commun, celui-ci contiendra le facteur 2^α. D'autre part, tous les numérateurs deviendront pairs, excepté celui de $\frac{1}{2^\alpha}$, en sorte que la somme de ces numérateurs sera un nombre impair. La fraction qui est égale à S_n ne saurait donc se réduire à un nombre entier. C. Q. F. D.

Note. — M. Dellac, mon collègue au lycée de Marseille, à qui j'ai communiqué cette solution, m'a fait observer que, si l'on supprime dans S_n tous les termes dont le dénominateur est pair, on obtient une nouvelle suite
$$S'_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n-1}\left(ou\ \frac{1}{n}\right),$$
qui ne peut pas non plus être un nombre entier. Pour le démontrer, il suffit de faire jouer au nombre 3 le rôle que jouait le nombre 2 à l'égard de S_n.

Dans S'_n, ajoute M. Dellac, on pourrait de même supprimer tous les termes dont le dénominateur est multiple de 3, etc...

QUESTION 366

Solution par M. Th.-M. VLADIMIRESCU.

L'aire comprise entre la courbe

$$(\Gamma) \qquad x^2(a^2y^2 + b^2x^2) = a^4y^2,$$

et ses deux asymptotes réelles est équivalente à celle de l'ellipse de demi-axes a *et* b. *(Barisien.)*

Soient A l'aire, au-dessus de OX, comprise entre la courbe (Γ) et ses deux asymptotes réelles.

On a

$$(1) \qquad dA = \frac{bx^2\,dx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

En posant $x = a \sin \varphi$,

on a $dx = a \cos \varphi d \varphi$,

l'équation (1) devient $dA = ab \sin^2 \varphi d\varphi$.

Donc

$$A = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi.$$

Par suite, $A = \frac{ab}{2}\left[\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{2}.$

L'aire totale est donc égale à πab, c'est-à-dire à l'aire de l'ellipse de demi-axes a et b.

Autrement (*). — Il est bien évident que le théorème sera démontré si l'on prouve que l'aire relative à la courbe

$$\Gamma \equiv x^2(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0,$$

est équivalente à celle qui est limitée par la circonférence

$$C \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

(*) Cette seconde solution est de Mme Veuve F. Prime.

Soit A le point où cette circonférence coupe Ox; en désignant par Y et par y, les ordonnées des points M, m des courbes P, C qui répondent à la même abscisse $x = $ OP, on a

$$yY = x^2.$$

Il en résulte que l'angle mOP vaut l'angle OMP et que, si Om coupe en μ la tangente à C au point A, Aμ = Om.

Soient M', m', μ' les positions voisines des points M, m, μ et S, s, σ les aires MOM', mOm', μOμ'. Les angles MOM', mOm' étant égaux

$$\frac{s}{S} = \frac{\overline{Om}^2}{\overline{OM}^2} = \frac{\overline{A\mu}^2}{a^2},$$

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{\overline{O\mu}^2}{\overline{OM}^2} = \frac{\overline{O\mu}^2}{a^2},$$

donc,

$$\frac{\sigma - s}{S} = \frac{\overline{O\mu}^2 - \overline{A\mu}^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

On voit, par là, que l'élément de surface MOM' de C est équivalent à l'élément $mm'\mu'\mu$ de Γ; donc....

Nota. — Solution analogue par M. GROLLEAU.

QUESTION PROPOSÉE

386. — Soient M un point d'une ellipse Γ, M' son symétrique par rapport au centre O; la polaire de M' par rapport au cercle décrit sur la ligne des foyers comme diamètre, rencontre la normale Δ, en M, en un certain point K. Si, sur Δ, on prend K', symétrique de K par rapport au point où Δ coupe le petit axe de Γ; K' sera le centre de courbure correspondant au point M. *(G. L.)*

ERRATA.

Page 25, ligne 2, en remontant; au lieu de a lisez l.
Page 26, ligne 12; au lieu de as lisez as_n.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 4060-3-94.

QUELQUES PROBLÈMES SUR LES CONIQUES

QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS FIXES

Par M. **Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

Nous nous proposons d'étudier l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes et, en même temps, de traiter quelques questions se rattachant à ce problème.

Par les quatre points donnés on peut toujours faire passer une seule hyperbole équilatère; nous choisirons les asymptotes de cette hyperbole pour axes de coordonnées, de telle sorte que son équation sera de la forme

$$xy + f' = 0,$$

Nous pouvons ensuite faire passer par les quatre points une conique dont les axes sont parallèles aux asymptotes de cette hyperbole, de sorte que cette conique aura une équation de la forme

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

et que l'équation générale des coniques passant par les quatre points fixes sera

$$(1) \quad ax^2 + cy^2 + 2\lambda xy + 2dx + 2ey + f + 2\lambda f' = 0.$$

Cette équation aurait conservé la même forme, si nous avions pris pour axes les asymptotes d'une quelconque des hyperboles qui passent par les quatre points, mais les axes auraient été obliques.

Cela posé, rappelons quelques propriétés, bien connues, des faisceaux de coniques. En exprimant que l'équation (1) représente une parabole, on obtient pour λ les deux valeurs

$$\lambda = \pm\sqrt{ac};$$

de sorte que par quatre points on peut toujours faire passer deux paraboles réelles ou imaginaires, et que les directions

des axes de ces paraboles sont données par les équations

$$x\sqrt{a} \pm y\sqrt{c} = 0.$$

Le lieu des centres des coniques représentées par l'équation (1), lieu que l'on obtient en éliminant λ entre les équations

$$\lambda y + ax + d = 0,$$
$$\lambda x + cy + e = 0,$$

est une conique, appelée *conique des neuf points* dont l'équation est

$$(2) \qquad ax^2 - cy^2 + dx - ey = 0.$$

Les asymptotes de cette conique sont parallèles aux axes des deux paraboles qui passent par les quatre points, et la tangente à l'origine a pour équation

$$dx - ey = 0.$$

Nous désignerons cette droite par Δ.

Revenons maintenant à la recherche de l'enveloppe des asymptotes des coniques (1). En exprimant que la droite représentée par

$$y = mx + h,$$

rencontre la conique (1) en deux points rejetés à l'infini, on obtient les relations

$$2\lambda m + cm^2 + a = 0,$$
$$\lambda h + hcm + em + d = 0,$$

qui, par l'élimination de λ, donnent l'équation

$$hcm^2 + 2em^2 + 2dm - ah = 0.$$

C'est l'équation tangentielle de l'enveloppe, dans le système de coordonnées (m, h). En passant aux coordonnées tangentielles ordinaires, au moyen des formules

$$m = -\frac{u}{v}, \qquad h = \frac{1}{v},$$

on arrive à l'équation

$$(3) \qquad 2uv(eu - dv) + cu^2 - av^2 = 0,$$

qui représente une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini. Par suite, en vertu des formules de Plucker, cette courbe est du quatrième ordre; de plus, elle possède trois points de rebroussement.

Les points de contact avec la droite de l'infini sont donnés par l'équation

$$cu^2 - av^2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'ils sont sur les axes des paraboles qui passent par les quatre points donnés. La courbe (3) est tangente aux axes de coordonnées, résultat évident *a priori*, et la troisième tangente à cette courbe, issue de l'origine, a pour coefficient angulaire

$$m = -\frac{u}{v} = -\frac{d}{e},$$

c'est-à-dire que cette tangente est conjuguée harmonique de la droite Δ, par rapport aux axes des coordonnées. On arrive ainsi au théorème suivant :

L'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes est une courbe du quatrième ordre et de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini, aux points situés sur les axes des deux paraboles qui passent par les quatre points.

Si le faisceau de coniques (1) se compose d'hyperboles équilatères, la courbe (3) devient bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques; c'est une hypocycloïde à trois rebroussements; d'où le théorème connu :

L'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Réduction de l'équation (3). — L'équation

$$(3) \qquad 2uv(eu - dv) + cu^2 - av^2 = 0$$

peut se ramener à une forme plus simple, au moyen des transformations suivantes. Transportons l'origine au centre de la conique des neuf points. Les formules que nous devons employer sont :

$$x = x' - \frac{d}{2a},$$

$$y = y' - \frac{e}{2c}.$$

L'équation de la droite :

$$ux + vy - 1 = 0,$$

devient $$ux + vy - \frac{ud}{2a} - \frac{ve}{2c} - 1 = 0;$$

et les coordonnées de cette droite par rapport aux nouveaux axes, sont données par les formules

$$u' = \frac{u}{\frac{du}{2a} + \frac{ev}{2c} + 1},$$

$$v' = \frac{v}{\frac{du}{2a} + \frac{ev}{2c} + 1};$$

d'où l'on déduit

$$u = \frac{u'}{-\frac{du'}{2a} - \frac{ev'}{2c} + 1},$$

$$v = \frac{v'}{-\frac{du'}{2a} - \frac{ev'}{2c} + 1}$$

et l'équation (3) prend la forme

$$2u'v'(eu' - dv') + (cu'^2 - av'^2)\left(-\frac{du'}{2a} - \frac{ev'}{2c} + 1\right) = 0;$$

ou, après simplifications,

$$(4) \quad -\frac{cd}{2a}u'^3 + \frac{ae}{2c}v'^3 + \frac{3eu'^2v'}{2} - \frac{3du'v'^2}{2} + cu'^2 - av'^2 = 0.$$

Posons maintenant

$$u'\sqrt{c} + v'\sqrt{a} = u,$$
$$u'\sqrt{c} - v'\sqrt{a} = v;$$

d'où

$$u' = \frac{u+v}{2\sqrt{c}}.$$

$$v' = \frac{u-v}{2\sqrt{a}}.$$

L'équation (4) devient

$$(5) \quad (e\sqrt{a} - d\sqrt{c})u^3 - (e\sqrt{a} + d\sqrt{c})v^3 + 4acuv = 0,$$

ou

$$(6) \quad \alpha u^3 + \beta v^3 + \gamma uv = 0;$$

en posant

$$(7) \quad \begin{aligned} \alpha &= e\sqrt{a} - d\sqrt{c}, \\ \beta &= -(e\sqrt{a} + d\sqrt{c}), \\ \gamma &= 4ac. \end{aligned}$$

Cette équation nous permet de poser, en désignant par λ un paramètre arbitraire :

$$u\sqrt[3]{\alpha} = \gamma\frac{\lambda^2}{\lambda^3 - 1},$$

$$v\sqrt[3]{\beta} = -\gamma\frac{\lambda}{\lambda^3 - 1}.$$

Ces formules permettent d'étudier la géométrie sur la courbe (6), mais il ne faut pas oublier que les axes sont obliques.

L'équation (6) est l'équation générale des courbes de troisième classe et de quatrième ordre, bitangentes à la droite de l'infini; cette équation ne renferme en réalité que deux paramètres arbitraires; savoir les rapports de deux des quantités α, β, γ à la troisième, et ces quantités α, β, γ, dépendent, en vertu des relations (7), des paramètres a, c, d, e; ainsi

Toute courbe de troisième classe et de quatrième ordre, bitangente à la droite de l'infini, peut, d'une infinité de manières, être considérée comme l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes.

Parmi les coniques qui passent par les quatre points, il faut distinguer les couples de côtés opposés et les diagonales, qui fournissent trois couples de tangentes de la courbe (6). Considérons le triangle formé par le point de rencontre des diagonales et les points de concours des côtés opposés; nous démontrerons plus loin, par une méthode naturelle, que les droites obtenues en menant par les sommets de ce triangle des parallèles aux côtés opposés sont encore des tangentes de la courbe (6). ce qui nous conduit au théorème suivant :

Étant donné un quadrilatère, il existe une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini, aux points situés sur les axes des deux paraboles circonscrites au quadrilatère; tangente aux côtés et aux diagonales du quadrilatère, et aux droites obtenues en menant, par les sommets du triangle formé par le point de rencontre des diagonales et les points de concours des côtés opposés du quadrilatère, des parallèles aux côtés opposés.

Considérons l'un des points communs à la courbe (6) et à la conique des centres (conique des neuf points). Soit P ce point et soit P′, un point infiniment voisin pris sur la conique des centres. Soient P′A, P′B, P′C les tangentes à la courbe (6), issues de P′, et soit Δ la tangente à la conique des centres, au point P′. On sait que les quatre droites P′A, P′B, P′C, Δ forment un faisceau harmonique. Si le point P′ se rapproche

indéfiniment du point P, les droites P′A, P′B, se confondent; et, par suite, la droite Δ vient se confondre avec la limite commune des droites P′A, P′B, c'est-à-dire avec la tangente, au point P, à la courbe (6). D'ailleurs la conique des centres passe par les points à l'infini de la courbe (δ); les six points d'intersection, à distance finie, des deux courbes se divisent en trois couples où les deux courbes sont tangentes. De tout ce qui précède et des propriétés, bien connues, des quartiques à trois points de rebroussement, résulte une solution complète de la question n° 151 proposée par M. Hadamard (*Journal de Mathématiques spéciales*, 1885, page 72).

(*A suivre.*)

THÉORÈMES SUR L'HYPOCYCLOÏDE
A TROIS REBROUSSEMENTS

Par M. A. Cazamian, élève au lycée de Pau.

1. L'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements.

2. L'enveloppe des axes et l'enveloppe des tangentes aux sommets des paraboles conjugées à un triangle sont des hypocycloïdes à trois rebroussements.

3. L'enveloppe des axes des paraboles passant par un point donné et tangentes à une droite en un point donné est une hypocycloïde à trois rebroussements.

4. L'enveloppe des axes des paraboles tangentes à une droite donnée et à une autre droite donnée en un point donné est une hypocycloïde à trois rebroussements. L'enveloppe des tangentes aux sommets est une autre hypocycloïde à trois rebroussements.

5. Si l'on considère dans un cercle une corde quelconque et la tangente à l'extrémité de cette corde :

1° La droite PP′ joignant les projections d'un point M quelconque du cercle sur la corde et sur la tangente enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

2° La perpendiculaire menée de M sur PP′ enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.

6. Montrer géométriquement que toutes les propositions précédentes se ramènent à *un seul* théorème, théorème connu, d'ailleurs.

7. L'aire de l'hypocycloïde à trois rebroussements est le quart de la différence entre les aires du cercle passant par les trois points de rebroussement et du cercle inscrit à la courbe.

8. Si l'on considère le folium double droit, podaire de l'hypocycloïde à trois rebroussements par rapport à l'un de ses sommets, l'aire de ce folium double est le quart de l'aire de l'hypocycloïde.

9. L'aire de chacun des trois foliums droits, podaires de l'hypocycloïde par rapport aux points de rencontre du cercle inscrit à la courbe avec les axes, est également le quart de l'aire de l'hypocycloïde.

10. L'hypocycloïde à trois rebroussements est l'enveloppe des axes des hyperboles d'un faisceau.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE PONCELET

Par M. **Ch. Michel**, élève au collège Chaptal.

Le théorème de Poncelet que nous nous proposons d'établir est le suivant :

Les six sommets de deux triangles conjugués par rapport à une même conique (Γ) *sont sur une conique.*

Soient ABC et A′B′C′ les deux triangles. Les coniques passant par les quatre points A, B, C et A′ rencontrent B′C′ en des couples de points en involution. En particulier, la conique réduite aux deux droites A′B′ et AC et la conique réduite aux deux droites A′C et AB rencontrent B′C′ en des couples de points (M, N) et (M′, N′) de cette involution. Mais, comme il est facile de le voir, les points M et N et les points M′ et N′ sont conjugés par rapport à la conique (Γ). Donc l'involution précédente et l'involution des couples

de points situés sur $B'C'$ et conjugués par rapport à la conique (Γ) ont deux couples de points communs; par suite, elles sont confondues. Il existe donc une conique, passant par les points A, B, C, A', qui passe en même temps par les deux points B', C', ce qui établit la proposition.

SUR CERTAINES DÉCOMPOSITIONS ALGÉBRIQUES
ET SUR LEURS APPLICATIONS AU CALCUL INTÉGRAL

Lorsqu'on pose
$$y = \frac{f(x)}{F(x)},$$
$f(x)$, $F(x)$ désignant des fonctions entières, si l'on a
$$F(x) = (x - a)(x - b)\ldots(x - l),$$
une méthode classique permet d'écrire immédiatement la fraction proposée sous la forme d'une somme de fractions simples. Il n'y a rien à ajouter à cette méthode qui est aussi simple que possible.

Lorsque $f(x)$ est décomposée en facteurs binômes, on peut obtenir le développement en question par une voie moins simple, mais qui, appliquée dans certains exemples, tels que ceux que nous allons indiquer, conduit à des conséquences intéressantes. Voici d'ailleurs la solution à laquelle nous venons de faire allusion.

1. Posons
$$u_k = a_k x + b_k$$
et considérons la fraction rationnelle.
$$Y = \frac{u_1}{u_2 u_3}.$$
Les égalités
$$u_1 = a_1 x + b_1,$$
$$u_2 = a_2 x + b_2,$$
$$u_3 = a_3 x + b_3,$$
donnent
$$\begin{vmatrix} u_1 & a_1 & b_1 \\ u_2 & a_2 & b_2 \\ u_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$
En posant
$$\delta_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \qquad \delta_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1, \qquad \delta_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2,$$

on a donc $$u_1\delta_1 + u_2\delta_2 + u_3\delta_3 = 0,$$
et, par suite, $$\delta_1 Y = -\frac{\delta_3}{u_2} - \frac{\delta_2}{u_3}.$$
La décomposition est effectuée.

2. Prenons maintenant la fraction
$$Y = \frac{u_1u_2}{u_3u_4u_5}.$$
On a
$$\begin{aligned} u_1u_2 &= Ax^2 + Bx + C, \\ u_4u_5 &= \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \\ u_5u_3 &= \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma', \\ u_3u_4 &= \alpha'' x^2 + \beta'' x + \gamma'', \end{aligned}$$
et, par suite (*),
$$\begin{vmatrix} u_1u_2 & A & B & C \\ u_4u_5 & \alpha & \beta & \gamma \\ u_5u_3 & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ u_3u_4 & \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0.$$
Cette égalité donne
$$\delta u_1u_2 = mu_4u_5 + nu_5u_3 + pu_3u_4,$$
et, par suite, $$\delta Y = \frac{m}{u_3} + \frac{n}{u_4} + \frac{p}{u_5}, \qquad \text{etc.}$$
On voit comment on peut généraliser (**) le calcul précé-

(*) Le déterminant mineur δ qui correspond au terme u_1u_2 est susceptible d'un calcul très simple.

On a en effet
$$\begin{aligned} \alpha &= a_4a_5, & \beta &= a_4b_5 + a_5b_4, & \gamma &= b_4b_5, \\ \alpha' &= a_5a_3, & &\dots\dots\dots & &\dots\dots \\ \alpha'' &= a_3a_4, & &\dots\dots\dots & &\dots\dots \end{aligned}$$
et, par conséquent,
$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_4a_5 & a_4b_5 + a_5b_4 & b_4b_5 \\ a_5a_3 & a_5b_3 + a_3b_5 & b_5b_3 \\ a_3a_4 & a_3b_4 + a_4b_3 & b_3b_4 \end{vmatrix}.$$
On trouve facilement, pour la valeur de ce déterminant
$$(a_4b_5 - a_5b_4)(a_5b_3 - a_3b_5)(a_3b_4 - a_4b_3).$$
Il n'est pas nul, si, comme nous le supposons ici, les facteurs u_3, u_4, u_5 sont indépendants.

(**) A propos de cette généralisation, on voit que le déterminant qui sera le coefficient du produit placé au numérateur de la fraction donnée doit s'annuler quand deux facteurs du dénominateur sont proportionnels. On rencontre ici, à ce propos, des déterminants assez curieux.

Par exemple, en prenant quatre facteurs au dénominateur, en les appelant u_1, u_2, u_3, u_4 on voit que le déterminant

dent et en rapprochant les résultats obtenus par cette voie de ceux auquels conduit la méthode ordinaire, rappelée plus haut, on arrive à quelques conséquences intéressantes. C'est ainsi que les déterminants qui s'introduisent dans le calcul que nous avons indiqué se trouvent calculés par une formule très simple et assez inattendue.

Mais sans insister sur ces conséquences, nous allons montrer comment l'idée développée plus haut conduit à des décompositions trouvant quelques heureuses applications dans le calcul intégral.

3. On sait que l'on a

$$\lambda = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tg } \frac{x}{a},$$

et

$$\mu = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \text{ L } \frac{x - a}{x + a}.$$

A ces intégrales, on peut en rattacher d'autres, comme nous allons le montrer.

Posons $u_p = x^2 + (a_p)^2$, $v_q = x^2 + (b_q)^2$,

et considérons l'intégrale

$$Y_p = \int \frac{u_1 u_2 \ldots u_{p-1}}{v_1 v_2 \ldots v_p} dx.$$

On peut ramener le calcul de y_p à celui de λ.

Prenons d'abord, pour mettre en lumière la méthode que nous allons employer, le cas le plus simple, celui de $p = 2$; et considérons l'intégrale

$$Y_2 = \int \frac{u_1}{v_1 v_2} dx.$$

Les relations

$$u_1 = x^2 + (a_1)^2,$$
$$v_1 = x^2 + (b_1)^2,$$
$$v_2 = x^2 + (b_2)^2,$$

$$\begin{vmatrix} a_1a_2a_3 & b_1a_2a_3 + b_2a_3a_1 + b_3a_1a_2 & a_1b_2b_3 + a_2b_3b_1 + a_3b_1b_2 & b_1b_2b_3 \\ a_2a_3a_4 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_3a_4a_1 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_4a_1a_3 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

est égal à

$$(a_1b_2 - b_1a_2)(a_1b_3 - b_2a_3)(a_2b_4 - b_1a_4)(a_2b_3 - b_2a_3)(a_2b_4 - b_2a_4)(a_3b_4 - b_3a_4).$$

donnent

$$\begin{vmatrix} u_1 & 1 & (a_1)^2 \\ v_1 & 1 & (b_1)^2 \\ v_2 & 1 & (b_2)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou $u_1[(b_2)^2 - (b_1)^2] = v_1[(b_2)^2 - (a_1)^2] + v_2[(a_1)_2 - (b_1)^2]$.

Nous supposons d'ailleurs que les coefficients b_1, b_2, sont inégaux; c'est le cas général. Nous aurons donc

$$u_1 = Av_1 + Bv_2,$$

en posant

$$A = \frac{(b_2)^2 - (a_1)^2}{(b_2)^2 - (b_1)^2}, \qquad B = \frac{(a_1)^2 - (b_1)^2}{(b_2)^2 - (b_1)^2}.$$

On déduit de cette remarque,

$$Y_2 = A\int\frac{dx}{v_2} + B\int\frac{dx}{v_1}.$$

Le calcul de l'intégrale y_2 se trouve ramené à celui de deux intégrales λ. Cette conséquence s'applique au cas où les fonctions u_1, v_1, v_2 sont de la forme $x^2 \pm a^2$; Y_2 est alors une somme de deux intégrales telles que λ ou μ.

4. Considérons maintenant le cas de l'intégrale

$$Y_3 = \int\frac{u_1u_2}{v_1v_2v_3}\,dx.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} u_1u_2 &= \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma, \\ v_1v_2 &= ax^4 + bx^2 + c, \\ v_2v_3 &= a'x^4 + b'x^2 + c', \\ v_3v_1 &= a''x^4 + b''x^2 + c'', \end{aligned}$$

et, par conséquent

$$\begin{vmatrix} u_1u_2 & \alpha & \beta & \gamma \\ v_1v_2 & a & b & c \\ v_2v_3 & a' & b' & c' \\ v_3v_1 & a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on a

$$u_1u_2 = Av_1v_2 + Bv_2v_3 + Cv_3v_1.$$

On peut donc écrire

$$Y_3 = A\int\frac{dx}{v_3} + B\int\frac{dx}{v_1} + C\int\frac{dx}{v_2},$$

et le calcul de Y_2 est ramené à celui des intégrales λ, ou des intégrales μ.

On généralise facilement les résultats précédents pour le calcul de Y_p.

5. Posons maintenant :

$$u_p = a_p \sin x + b_p \cos x,$$

et considérons l'intégrale

$$\int \frac{u_1 u_2 \ldots u_{p-1}}{u_p u_{p+1} \ldots u_{2p}} dx.$$

Par exemple, prenons l'intégrale

$$y = \int \frac{a \sin x + b \cos x}{(a' \sin x + b' \cos x)(a'' \sin x + b'' \cos x)} dx.$$

En posant

$$u = a \sin x + b \cos x,$$
$$v = a' \sin x + b' \cos x,$$
$$w = a'' \sin x + b'' \cos x.$$

on a

$$\begin{vmatrix} u & a & b \\ v & a' & b' \\ w & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$u = Av + Bw.$$

On a donc

$$Y = B\int \frac{dx}{a' \sin x + b' \cos x} + A\int \frac{dx}{a'' \sin x + b'' \cos x}.$$

L'intégrale cherchée se trouve ramenée à deux intégrales. On sait, d'ailleurs, comment on trouve ces dernières en posant

$$b' = a' \operatorname{tg} \alpha,$$

et en observant que $a' \sin x + b' \cos x$ devient alors

$$\frac{a'}{\cos \alpha} \sin (x + \alpha).$$

On généralise ensuite l'intégrale Y et l'on ramène, comme nous l'avons expliqué dans les exemples précédents, cette intégrale à une somme d'intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{m \sin x + n \cos x}.$$

6. Considérons enfin l'intégrale

$$Y = \int \frac{1}{(a \sin^2 x + b \cos^2 x)(a' \sin^2 x + b' \cos^2 x)} dx.$$

En posant
$$u = \sin^2 x + \cos^2 x,$$
$$v = a \sin^2 x + b \cos^2 x,$$
$$w = a' \sin^2 x + b' \cos^2 x,$$

on a
$$\begin{vmatrix} u & 1 & 1 \\ v & a & b \\ w & a' & b' \end{vmatrix} \equiv 0,$$

et, par conséquent, $u = \mathrm{A}v + \mathrm{B}w.$

D'après cela,
$$\mathrm{Y} = \mathrm{B}\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} + \mathrm{A}\int \frac{dx}{a' \sin^2 x + b' \cos^2 x}.$$

Les intégrales de la forme
$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x},$$
se calculent, comme l'on sait, en observant que
$$\int \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{b + a \operatorname{tg}^2 x}.$$

On obtient un *arc tg*, quand a, b sont de même signe ; un *log*, quand a, b sont de signes contraires. *G. L.*

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 63).

---

8. — *Un angle droit pivote autour du point de rebroussement d'une développée de parabole : les tangentes aux extrémités des cordes d'intersection se rencontrent sur une parabole ; les normales aux mêmes extrémités se rencontrent sur une cubique.*

1° *Lieu du point de rencontre des tangentes.* — L'équation (1) de l'exercice 5 peut s'écrire
$$kt^3 - 3t\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} = 0.$$
Si t_1, t_2, t_3 sont les racines de cette équation, on a

(1) $$(t_1 + t_2) + t_3 = 0,$$

(2) $$t_1t_2 + t_3(t_1 + t_2) = -\frac{3\mathrm{X}}{k},$$

(3) $$(t_1t_2)t_3 = -\frac{2\mathrm{Y}}{k}.$$

On a aussi

(4) $$t_1t_2 = -1.$$

En éliminant les trois paramètres (t_1t_2), (t_1+t_2) et t_3 entre (1) (2) (3) et (4), on trouve, pour le lieu du point de rencontre des tangentes, l'équation de la parabole

$$4Y^2 = 3kX - k^2.$$

2° *Lieu du point de rencontre des normales.* — L'équation (3) de l'exercice 3 peut s'écrire

$$3kt^4 + 2kt^2 - 3tY - 2X = 0.$$

Si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les racines de cette équation, on a

(5) $$(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=0,$$

(6) $$(t_1+t_2)(t_3+t_4)+t_1t_2+t_3t_4=\frac{2}{3},$$

(7) $$t_1t_2(t_3+t_4)+t_3t_4(t_1+t_2)=\frac{Y}{k},$$

(8) $$(t_1t_2)(t_3t_4)=-\frac{2X}{3k}.$$

On a de plus

(9) $$t_1t_2=-1.$$

L'élimination des quatre paramètres (t_1t_2), (t_3t_4), (t_1+t_2), (t_3+t_4) entre (5), (6), (7), (8) et (9) conduit à l'équation de la cubique

$$27kY^2 = (2X-5k)(2X+3k)^2.$$

9. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener à la développée de parabole deux tangentes rectangulaires est une parabole.*

D'après l'exercice 8, le coefficient angulaire m de la tangente en fonction du paramètre t est

$$m=\frac{3t}{2}.$$

Si on élimine t entre cette équation et la suivante

$$kt^3 - 3tX + 2Y = 0,$$

on obtient
$$\frac{4km^3}{27} - mX + Y = 0.$$

Si l'on exprime que cette équation, du troisième degré en m, a deux racines dont le produit est égal à -1, on trouve, par un procédé en tout semblable à celui de l'exercice (8),

$$27^2.Y^2 - 4.27.kX + 16k^2 = 0.$$

C'est une parabole. Son équation devient, en posant $k=\frac{27p}{8}$,

$$Y^2 - \frac{pX}{2} + \frac{p^2}{4} = 0.$$

10. — *Le lieu des points d'où l'on peut mener à la développée de parabole deux normales rectangulaires est une cubique.*

On a vu (exercice 3) que l'équation aux coefficients angulaires n des normales issues d'un point (X, Y) à la parabole semi-cubique était

$$27n^4X - 27n^3Y - 12n^2k - 8k = 0.$$

En exprimant que deux des racines de cette équation du quatrième degré en n ont leur produit égal à -1, on trouve, par le procédé de l'exercice 8, l'équation

$$8.27^2.ky^2 + (27X - 20k)(27X + 8k)^2 = 0.$$

C'est une cubique, dont l'équation devient, en posant $k = \frac{27p}{8}$,

$$2pY^2 + (2X - 5p)(X + p)^2 = 0.$$

Remarque. — Les exercices que nous indiquerons dans l'article suivant dérivent de formules que nous allons donner.

Étant donnée une parabole (P) *de foyer* F *et de sommet* S, *d'un point* M *du plan on mène les tangentes à* (P), *dont les points de contact sont* T_1 *et* T_2, *ainsi que les normales dont les pieds sont* N_1, N_2, N_3.

Les exercices qui vont suivre seront relatifs à divers lieux décrits par le point M.

Soient (x_1, y_1) (x_2, y_2) les coordonnées de T_1 et T_2, $(X_1 Y_1)$ (X_2, Y_2) (X_3, Y_3) celles de N_1, N_2 et N_3. Au moyen des équations aux ordonnées et aux abscisses des points de contact et des pieds de normales issues d'un point M (α, β), on trouve les relations

$$x_1 + x_2 = \frac{2(\beta^2 - p\alpha)}{p}, \qquad y_1 + y_2 = 2\beta,$$

$$x_1 x_2 = \alpha^2, \qquad y_1 y_2 = 2p\alpha,$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2(\alpha - p). \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0,$$

$$X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = (\alpha - p)^2, \quad Y_1Y_2 + Y_1Y_3 + Y_2Y_3 = -2p(\alpha - p),$$

$$X_1X_2X_3 = \frac{p\beta^2}{2}, \qquad Y_1Y_2Y_3 = 2p^2\beta.$$

On en déduit les formules suivantes:

1° $$\overline{ST_1}^2 + \overline{ST_2}^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2.$$

$$\overline{ST_1}^2 + \overline{ST_2}^2 = \frac{4(\beta^2 - p\alpha)^2}{p^2} - 2\alpha^2 + 4\beta^2 - 4p\alpha. \qquad (1)$$

2° $$\overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2 = (X_1^2 + Y_1^2) + (X_2^2 + Y_2^2) + (X_3^2 + Y_3^2) = (\Sigma X_1)^2 - 2\Sigma X_1X_2 + (\Sigma Y_1)^2 - 2\Sigma Y_1Y_2$$

$$\overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2 = 2\alpha^2 - 2p^2 \qquad (2)$$

3° $$\overline{FT_1}^2 + \overline{FT_2}^2 = \left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2 + \left(x_2 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_2^2 = \overline{ST_1}^2 + \overline{ST_2}^2 - p(x_1 + x_2) + \frac{p^2}{2}.$$

$$\overline{FT_1}^2 + \overline{FT_2}^2 = \frac{4(\beta^2 - p\alpha)}{p^2} - 2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2p\alpha + \frac{p^2}{2}. \quad (3)$$

4° $$\overline{FN_1}^2+\overline{FN_2}^2+\overline{FN_3}^2=\left(X_1-\frac{p}{2}\right)^2+Y_1^2+\left(X_2-\frac{p}{2}\right)^2+Y_2^2 + \left(X_3-\frac{p}{2}\right)^2+Y_3^2$$

$$=\overline{SN_1}^2+\overline{SN_2}^2+\overline{SN_3}^2-p\Sigma X_1+\frac{3p^2}{4}.$$

$$\overline{FN_1}^2+\overline{FN_2}^2+\overline{FN_3}^2=2\alpha^2-2p\alpha+\frac{3p^2}{4}. \quad (4)$$

On a aussi

$$FT_1 = x_1 + \frac{p}{2}, \qquad FN_1 = X_1 + \frac{p}{2},$$

$$FT = x_2 + \frac{p}{2}, \qquad FN_2 = X_2 + \frac{p}{2},$$

$$FN_3 = X_3 + \frac{p}{2}.$$

On a donc encore les relations suivantes :

5° $$FT_1 + FT_2 = (x_1 + x_2) + p,$$

$$FT_1 + FT_2 = \frac{2(\beta^2 - p\alpha)}{p} + p. \quad (5)$$

6° $$FN_1 + FN_2 + FN_3 = \Sigma X_1 + \frac{3p}{2},$$

$$FN_1 + FN_2 + FN_3 = 2\alpha - \frac{p}{2}. \quad (6)$$

7° $$FT_1+FT_2=\left(x_1+\frac{p}{2}\right)\left(x_2+\frac{p}{2}\right)=x_1x_2+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+\frac{p^2}{4},$$

$$FT_1.FT_2=\alpha^2+\beta^2-p\alpha+\frac{p^2}{4}. \quad (7)$$

8° $$FN_1.FN_2.FN_3 = \left(X_1 + \frac{p}{2}\right)\left(X_2 + \frac{p}{2}\right)\left(X_3 + \frac{p}{2}\right)$$

$$= X_1X_2X_3 + \frac{p}{2}\Sigma X_1X_2 + \frac{p^2}{4}\Sigma X_1 + \frac{p^3}{8},$$

$$FN_1.FN_2.FN_3 = \frac{p}{2}\left[\alpha^2 + \beta^2 - p\alpha + \frac{p^2}{4}\right]. \quad (8)$$

9° On a aussi $$\overline{FM}^2 = \left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2,$$

$$\overline{FM}^2 = \alpha^2 + \beta^2 - p\alpha + \frac{p^2}{4}. \qquad (9)$$

On en déduit immédiatement les relations

$$FT_1.FT_2 = \overline{FM}^2,$$

$$\frac{FN_1.FN_2.FN_3}{FT_1.FT_2} = FS.$$

EXERCICE ÉCRIT

78. — On considère un ellipsoïde (E), fixe, rapporté à ses axes, et un plan P, mobile. Soient A, B, C les points où P coupe les axes de (E), O le centre de l'ellipsoïde, M le point qui a pour coordonnées OA, OB, OC.

On demande le lieu de M sachant que la conique Σ, intersection de P et de (E), a ses axes parallèles aux bissectrices de l'angle ACB.

Notes sur l'exercice 77.

1° Soient : $E = 0$, l'équation de Γ; $H = 0_1$ celle de l'hyperbole d'Apollonius, correspondant au point M. En écrivant que $E + 2\lambda H = 0$ admet l'origine comme foyer (*), on trouve pour le lieu cherché

$$a^2b^2x^2y^2 = c^2(b^4y^2 - a^4x^2). \qquad (1)$$

La quartique correspondante est une transformée de l'hyperbole dans la *transformation cartésienne réciproque*. Elle est unicursale; trois points doubles sont en évidence.

2° En cherchant l'équation du cône, de sommet S, ayant pour base, dans le plan yox, la conique correspondant à l'équation $E + 2\lambda H = 0$, et en exprimant que ce cône est de révolution, un calcul facile conduit à l'équation

$$a^2b^2x^2y^2 = c^2b^2(b^2 + h^2)y^2 - c^2a^2(a^2 + h^2)x^2.$$

3° Pour $h = 0$, on retrouve (1). Ce fait s'explique en considérant la sphère infiniment petite inscrite dans le cône considéré. A la limite, elle est coupée par yox suivant un cercle de centre o, infiniment petit, doublement tangent à E.

(*) Le procédé le plus simple nous paraît être le suivant. On écrit que dans la forme $E + 2\lambda H + \mu(x^2 + y^2)$ tous les mineurs du discriminant sont nuls.

QUESTION 346

Solution par M. Barisien.

Quelle est, parmi les normales à une cardioïde, celle qui est la plus éloignée du point de rebroussement?

Généraliser, en prenant, pour résoudre ce problème, la courbe représentée par l'équation $\rho = a \cos^n \frac{\omega}{n}$.

Traitons le cas général. Si δ désigne la distance à la normale et si V désigne l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on a

(1) $$\delta = \rho \cos V.$$

Or, si ρ' est la dérivée de ρ par rapport à ω,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\operatorname{cotg} \frac{\omega}{n}$$

ce qui montre que $$V = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{n}.$$

Cette relation donne, accessoirement, une construction facile de la tangente en chacun des points de la courbe

On a aussi $$\cos V = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

Donc $$\delta = \frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}},$$

et par suite $$\delta = a \sin \frac{\omega}{n} \cos^n \frac{\omega}{n}.$$

En égalant à o la dérivée de δ par rapport à ω, on trouve

$$\cos^{n-1} \frac{\omega}{n} \left[\cos^2 \frac{\omega}{n} - n \sin^2 \frac{\omega}{n}\right] = 0.$$

La solution $$\frac{\omega}{n} = \frac{\pi}{2}$$

correspond à $\delta = 0$, c'est-à-dire au minimum de δ.

La valeur maxima de δ correspond donc à

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{n} = \frac{1}{n}$$

et elle a pour valeur

$$\delta_m = \frac{an^{\frac{n}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Dans le cas de la cardioïde, $n = 2$;

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \delta_m = \frac{2a}{3\sqrt{3}}, \qquad \cos\omega = \frac{1}{3}.$$

Le rayon vecteur correspondant à δ_m a pour valeur $\frac{2a}{3}$.

QUESTION 355 (428 par erreur.)

Solution par M. Waroquier.

D'un point fixe P *du plan d'une lemniscate de Bernoulli on mène une sécante quelconque qui rencontre la lemniscate en quatre points* ABCD. *Le lieu du centre des moyennes distances des quatre points* A, B, C, D, *lorsque la sécante pivote autour du point* P, *est un cercle qui reste invriable pour toutes les lemniscates ayant même centre et mêmes directions d'axes.*

(E.-N. Barisien.)

Considérons une lemniscate

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2),$$

et un point $P(\alpha, \beta)$.

Une sécante, passant par P, aura pour équation

$$(1) \qquad y = mx + p,$$

en posant $p = \beta - m\alpha$.

L'équation aux x des points d'intersection de la sécante et de la lemniscate sera

$$x^4(1 + m^2)^2 + 4pm(1 + m^2)x^3 + \ldots = 0.$$

L'abscisse du centre des moyennes distances des quatre points d'intersection est

$$(2) \qquad x = -\frac{m(\beta - m\alpha)}{1 + m^2}.$$

On a le lieu de ce dernier point en éliminant m entre les équations (1) et (2). On trouve ainsi

$$x[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+(y-\beta)(\beta x-\alpha y)=0.$$

Mais ce lieu contient un facteur $x-\alpha$ introduit dans l'élimination.

Il reste alors $\quad x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0.$

C'est un cercle décrit sur OP comme diamètre et qui est le même pour toutes les lemniscates de même centre et de mêmes directions d'axes, puisque son équation est indépendante de c^2. Si le point P s'éloigne indéfiniment, dans une direction m, le lieu devient une droite perpendiculaire à cette direction et passant par le centre. On sait en effet que le diamètre d'une cyclique plane est une droite.

Généralisation (*):

Soit la courbe

$$(x^2+y^2)^2+Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Par le point (α, β), je mène une sécante

$$y-\beta=m(x-\alpha).$$

L'équation aux abscisses des points d'intersection est

$$x^4(1+m^2)^2+4m(1+m^2)(\beta-m\alpha)x^3+\ldots=0.$$

Si (X, Y) est le centre des moyennes distances des quatre points d'intersection, on a

$$(1)\qquad X=\frac{m(m\alpha-\beta)}{1+m^2},$$

$$(2)\qquad Y=(\beta-m\alpha)+mX.$$

Il faut éliminer m entre (1) et (2).

Avant cela, calculons Y en fonction de m. Nous trouvons

$$(3)\qquad Y=-\frac{(m\alpha-\beta)}{1+m^2}.$$

En comparant (1) et (3), on a

$$(4)\qquad Y=-\frac{1}{m}X.$$

On a donc cet autre résultat *que le centre des moyennes distances est le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine* O *des coordonnées sur la droite.*

(*) Cette seconde partie est de M. Barisien.

Puisque la droite passe par le point fixe P, il en résulte donc que le lieu du centre des moyennes distances est le cercle décrit sur OP comme diamètre.

D'ailleurs, en éliminant m entre (1) et (4), on trouve l'équation du cercle

$$X^2 + Y^2 - \alpha X - \beta Y = 0.$$

C'est le cercle de diamètre OP.

Nota. — Cette manière de conduire l'élimination enlève la solution étrangère qui est introduite lorsqu'on porte m tirée de (2), c'est-à-dire

$$m = \frac{Y - \beta}{X - \alpha}$$

dans l'équation (1).

Nota. — Solutions diverses par MM. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille; Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand; Foucart, élève au lycée Michelet; Mme Ve F. Prime; Droz-Farny, professeur au lycée de Porentruy; Vazou, professeur au collège de Falaise.

QUESTION 361

Solution par M. Barisien.

Démontrer que

$$(1) \qquad (x^2 + y^2)(x + a) = \frac{a^2}{2} y,$$

représente une strophoïde oblique. (G. L.)

On sait que la strophoïde est une cubique circulaire ayant une asymptote réelle et un point double dont les tangentes sont rectangulaires.

Voyons si l'on peut déterminer un point (α, β) du plan de la courbe, tel qu'en y transportant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes, l'équation de la courbe n'ait plus que des termes du 3e degré et du 2e degré.

Posons donc

$$X = x + \alpha, \qquad Y = y + \beta$$

l'équation (1) devient

$$(2) \quad (x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\alpha^2+\beta^2)(x+\alpha+a) = \frac{a^2}{2}(y+\beta).$$

Exprimant que le coefficient de x et y et le terme constant sont séparément nuls, on a la relation

$$a^2 + \beta^2 + 2\alpha(a + \alpha) = 0,$$

$$2\beta(a + \alpha) - \frac{a^2}{2} = 0,$$

$$(a + \alpha)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{a^2}{2}\beta.$$

Ces équations sont vérifiées par

$$\alpha = -\frac{a}{2},\ \beta = \frac{a}{2}.$$

L'équation (2) devient

$$2x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2 - 2xy) = 0.$$

Sous cette forme on reconnaît que (2) représente une cubique circulaire, possédant, à la nouvelle origine, un point double à tangentes rectangulaires; par conséquent, cette cubique est une strophoïde oblique.

Nota. — Solution analogue par M. DELORME.

QUESTION 364

Solution par M. VAZOU.

Pour tout arc x, compris entre 0 *et* $\frac{\pi}{3}$, *la différence* $\operatorname{tg} x - x$ *est comprise entre* $\frac{x^3}{3}$ *et* x^3.

Il faut démontrer la double inégalité

$$\frac{x^3}{3} < \operatorname{tg} x - x < x^3.$$

Considérons d'abord l'inégalité

$$\operatorname{tg} x - x > \frac{x^3}{3}$$

ou

$$y = \operatorname{tg} x - x - \frac{x^3}{3} > 0.$$

Cette fonction y s'annule pour $x = 0$; pour démontrer

qu'elle est positive, il faut prouver que la dérivée y' est positive quand x varie de o à $\frac{\pi}{3}$.

$$y' = \text{tg}^2 x - x^2 = (\text{tg}\, x + x)(\text{tg}\, x - x).$$

Or, on a $\qquad \text{tg}\, x > x \qquad \left(\text{de o à } \frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction y' et, par suite, la fonction y est positive.

Considérons maintenant l'inégalité

$$\text{tg}\, x - x < x^3.$$

Il faut démontrer que, en posant,

$$y = \text{tg}\, x - x - x^3 < o,$$

on a $y < o$.

Or $\qquad y' = \text{tg}^2 x - 3x^2 = x^2\left(\frac{\text{tg}^2 x}{x^2} - 3\right),$

$$y' = x^2\left(\frac{\text{tg}\, x}{x} + \sqrt{3}\right)\left(\frac{\text{tg}\, x}{x} - \sqrt{3}\right).$$

Cette dérivée y' est négative pour les valeurs de x comprises entre o et la première racine de l'équation $\frac{\text{tg}\, x}{x} - \sqrt{3} = o$, la fonction y décroît donc dans cet intervalle et, comme elle s'annule pour $x = o$, il en résulte que dans l'intervalle considéré elle est négative. D'ailleurs, $\frac{\pi}{3}$ est compris dans cet intervalle, car y' est négatif pour cette valeur; donc la fonction y est bien négative quand x varie de o à $\frac{\pi}{3}$. La proposition énoncéeest donc établie.

Note. — M. Delens, qui a proposé la question, nous a communiqué la remarque suivante :

« J'ai indiqué la limite supérieure x^3 pour la différence $\text{tg}\, x - x$, parce que cette limite simple est susceptible d'être établie par des calculs faciles; mais on en peut trouver de beaucoup plus rapprochées. Ainsi, $\frac{2x^3}{3}$, par exemple, est également une limite supérieure qu'il peut être utile de connaître et qu'on peut obtenir très simplement par l'étude de la fonction $\text{tg}\, x - x - \frac{2x^3}{3}$ entre o et $\frac{\pi}{3}$ ».

QUESTIONS PROPOSÉES

387. — En appelant *conique conjuguée* d'une conique donnée (K) celle dont les carrés des axes sont égaux et de signes contraires et en représentant (K) en coordonnées trilatères normales par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = 0.$$

Trouver *explicitement*, en coordonnées normales, l'équation de la conique conjuguée.

(E. Lemoine.)

388. — Trouver, pour $n = \infty$, la limite de

$$\frac{L(n!)}{nLn}. \qquad (G. L.)$$

389. — Si, sur les normales à une hyperbole équilatère, on porte à partir du point d'incidence, extérieurement à l'hyperbole, des longueurs égales au demi-rayon de courbure, la courbe obtenue est une sextique unicursale. Montrer que cette sextique est la polaire réciproque d'une lemniscate de Bernoulli.

390. — Le carré de la distance du centre O du cercle des rebroussements d'une hypocycloïde triangulaire à un point quelconque de la courbe est égal au carré du rayon de ce cercle diminué de huit fois le carré de la distance du point O à la tangente du point considéré. *(A. Cazamian.)*

391. — Quatre points d'une conique étant situés sur un cercle, si par l'un d'eux, A, on mène les cercles touchant la conique en chacun des trois autres, les points où ces cercles rencontrent de nouveau la conique sont, avec A, sur une même circonférence. *(A. Cazamian.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 6460-4-94.

QUELQUES PROBLÈMES SUR LES CONIQUES

QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS FIXES

Par M. **Balitrand**, ancien élève de l'École Polytechnique.

(*Suite et fin, voir page 73*).

Formes diverses de l'équation de la courbe (6). — Prenons comme axes de coordonnées deux côtés du quadrilatère fixe.

L'équation générale des coniques circonscrites au quadrilatère est

$$\frac{x^2}{aa'} + \frac{y^2}{bb'} + 2\lambda xy - x\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - y\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) + 1 = 0.$$

La conique des centres a pour équation

$$\frac{x^2}{aa'} - \frac{y^2}{bb'} - x\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a'}\right) + y\left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2b'}\right) = 0.$$

La courbe (6) aura pour équation

$$(8) \qquad 2uv\left[v\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a'}\right) - u\left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{2b'}\right)\right] + \frac{u^2}{bb'} - \frac{v^2}{aa'} = 0.$$

Supposons que nous prenions pour triangle de référence, le triangle formé par le point de rencontre des diagonales et les points de concours des côtés opposés du quadrilatère. Les coniques circonscrites au quadrilatère sont conjuguées par rapport à ce triangle et ont une équation de la forme

$$(9) \qquad px^2 + qy^2 + rz^2 = 0.$$

Désignons par (x_1, y_1, z_1) les coordonnées d'un sommet du quadrilatère et exprimons que la conique (9) passe par ce point, nous obtenons la relation

$$(10) \qquad px_1^2 + qy_1^2 + rz_1^2 = 0.$$

On voit que la conique (9) passe aussi par les points $(-x_1, y_1, z_1)$, $(x_1, -y_1, z_1)$, $(x_1, y_1, -z_1)$, c'est-à-dire par les autres sommets du quadrilatère. L'équation (9) est donc, en tenant compte de la relation (10), l'équation générale des coniques considérées. Il s'agit d'exprimer que la droite

$$(11) \qquad lx + my + nz = 0,$$

est une asymptote de la conique (9) et de trouver la relation qui existe dans ce cas entre les coefficients l, m, n.

A cet effet, nous écrirons que la droite (11) est tangente à la conique (9) et que le point de contact est rejeté à l'infini, ce qui nous fournit les relations

$$\frac{l^2}{p} + \frac{m^2}{q} + \frac{n^2}{r} = 0,$$

$$\frac{al}{p} + \frac{bm}{q} + \frac{cn}{r} = 0.$$

De ces deux relations on déduit

$$p = \frac{1}{mn(cm - bn)} = \frac{l}{lmn(cm - bn)},$$

$$q = \frac{1}{nl(an - cl)} = \frac{m}{lmn(an - cl)},$$

$$r = \frac{1}{lm(bl - am)} = \frac{n}{lmn(bl - am)},$$

et, en portant ces valeurs dans la relation (10), on a l'équation

$$(12) \qquad \frac{lx_1^2}{cm - bn} + \frac{my_1^2}{an - cl} + \frac{nz_1^2}{bl - am} = 0,$$

qui est l'équation tangentielle cherchée. Cette équation développée s'écrit :

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & abc\left(\frac{l^2x_1^2}{a} + \frac{m^2y_1^2}{b} + \frac{n^2z_1^2}{c}\right) + (a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c_2z_1^2)\, lmn \\ & \quad - ax_1^2l^2(cm + bn) - by_1^2m^2(an + cl) - cz_1^2n^2(bl + am) = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour avoir les tangentes issues d'un sommet du triangle de référence, il nous suffit de supposer que l'un des coefficients de l'équation (11), l par exemple, est nul. L'équation (13) devient, en faisant $l = 0$,

$$abc\left(\frac{m^2y_1^2}{b} + \frac{n^2z_1^2}{c}\right) - aby_1^2m^2n - acz_1^2n^2m = 0,$$

ou bien $\qquad a(m^2y_1^2 - n^2z_1^2)(cm - bn) = 0;$

ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

Équation ponctuelle de la courbe (6). — En écrivant que la droite

$$y - mx - h = 0,$$

est une asymptote de la conique

$$(1) \quad ax^2 + cy^2 + 2\lambda xy + 2dx + 2cy + f + 2\lambda f' = 0,$$

nous avons obtenu les relations :

$$2\lambda m + cm^2 + a = 0,$$
$$\lambda h + hcm + em + d = 0.$$

En éliminant λ et h entre ces relations et l'équation de la droite, nous arrivons à l'équation :

$$(14)\qquad cm^3x - m^2(cy + 2e) - m(ax + 2d) + ay = 0.$$

C'est l'équation générale des asymptotes des coniques (1), c'est-à-dire des tangentes à la courbe (6) en fonction du coefficient angulaire. Pour avoir l'enveloppe de cette droite, il faut éliminer m entre les équations obtenues en dérivant l'équation (14) par rapport à m et à la variable d'homogénéité (1). On obtient par ces dérivations les deux relations

$$(15)\quad \begin{cases} 3m^2cx - 2m(cy + 2e) - (ax + 2d) = 0, \\ - m^2(cy + 2e) - 2m(ax + 2d) + 3a = 0, \end{cases}$$

qui, par l'élimination de m, conduisent à :

$$(16)\quad \begin{cases} (2de + cdy + aex - 4acy)^2 + [(cy + 2e)^2 + 3cx(ax \\ \qquad + 2d)][(ax + 2d)^2 + 3ay(cy + 2e)] = 0. \end{cases}$$

C'est l'équation ponctuelle de la courbe enveloppée par les asymptotes des coniques qui passent par quatre points fixes

Enfin, les relations (15) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point de la courbe en fonction du paramètre arbitraire m, au moyen des formules

$$(17)\quad \begin{cases} x = -2\,\dfrac{cdm^2 + 2aem + ad}{(a - cm^2)^2}, \\ y = -2\,\dfrac{m^2(cem^2 + 2cdm + ae)}{(a - cm^2)^2}. \end{cases}$$

L'équation (14) fournit les coefficients angulaires des tangentes à la courbe (6) issues du point (x, y), et entre ces coefficients angulaires existe la relation

$$m_1m_2m_3 = -\frac{ay}{cx}.$$

Si les deux tangentes qui ont pour coefficients angulaires m_1 et m_2 sont rectangulaires, on a $m_1m_2 = -1$, et, par suite,

$$m_3 = \frac{ay}{cx}.$$

(*) Voir *Journal de Mathématiques spéciales*, 1884, page 226.



Cette valeur de m_3 est une des racines de l'équation (14), ce qui conduit à la relation

$$(18) \qquad (a - c)(ay^2 - cx^2) - 2cdx - 2aey = 0;$$

c'est l'équation du lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires à la courbe (6). Ainsi ·

Le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe (6) *deux tangentes rectangulaires est une conique.*

Si l'on considère le faisceau de coniques qui a pour équation

$$cx^2 + ay^2 - 2\lambda xy + \frac{4cd}{a-c}x - \frac{4ae}{a-c}y + f + \lambda f' = 0,$$

la conique des neuf points relative à ce faisceau a pour équation :

$$(a - c)(ay^2 - cx^2) - 2cdx - 2acy = 0,$$

et la conique corrrespondant à la courbe (18) a pour équation :

$$ax^2 - cy^2 - \frac{4ac}{(a-c)^2}(dx - cy) = 0.$$

Note sur le cercle des neuf points. — Nous avons vu plus haut que l'enveloppe des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est une hypocycloïde à trois rebroussements et que le lieu de leurs centres est le cercle des neuf points du triangle. On peut donner de cette dernière propriété une démonstration qui prouve en même temps l'existence du cercle des neuf points. Cette démonstration nous a été communiquée jadis par l'un de nos amis, mais nous ne l'avons trouvée imprimée nulle part.

Elle repose sur le lemme suivant qui est évident : On considère deux cordes AB et CD d'une hyperbole équilatère; par les milieux i et j de chacune d'elles, on mène une parallèle à l'autre; on détermine ainsi un point K, le cercle ijK passe par le centre de l'hyperbole.

Soit un triangle ABC. Je considère une hyperbole équilatère circonscrite (H). Si par les milieux A′ et B′ des deux cordes BC et AC, je mène les parallèles A′C′, B′C′, je vois que le centre de (H) est sur le cercle A′B′C′. Ce cercle est donc le lieu des centres des hyperboles (H).

En considérant les hyperboles équilatères fournies par un



côté et la hauteur correspondante, on voit que le lieu des centres, c'est-à-dire le cercle A'B'C' passe par les pieds des hauteurs. On sait maintenant que les hyperboles équilatères considérées passent par l'orthocentre H ; le lieu de leurs centres passe donc d'après tout ce qui précède au milieu des droites AH, BH, CH. C. Q. F. D.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 63).

11. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2 = \text{constante},$$

se compose de deux droites perpendiculaires à l'axe de la parabole (P).

La formule (2) donne, en effet

$$2\alpha^2 - 2p^2 = \text{constante}.$$

12. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{FN_1}^2 + \overline{FN_2}^2 + \overline{FN_3}^2 = \text{constante},$$

se compose de deux droites perpendiculaires à l'axe de la parabole (P).

La formule (4) donne

$$2\alpha^2 - 2p\alpha + \frac{3p^2}{4} = \text{constante}.$$

13. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{FT_1}^2 + \overline{FT_2}^2 = \overline{ST_1}^2 + \overline{ST_2}^2,$$

est une parabole.

En égalant les expressions (1) et (3), on trouve la parabole qui a pour équation

$$\beta^2 = p\alpha + \frac{p^2}{4}.$$

14. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{FN_1}^2 + \overline{FN_2}^2 + \overline{FN_3}^2 = \overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2,$$

est une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole (P).

En égalant les expressions (2) et (4), on trouve l'équation de la droite

$$\alpha = \frac{7p}{8}.$$

15. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{ST_1}^2 + \overline{ST_2}^2 + \overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2 = \text{constante},$$

se compose de deux paraboles.

En tenant compte des formules (1) et (2), on trouve en effet, en appelant $2h^2$ la constante :

$$\frac{4(\beta^2 - p\alpha)^2}{p^2} + 4(\beta^2 - p\alpha) - 2p^2 = 2h^2,$$

d'où, en résolvant par rapport à $(\beta^2 - p\alpha)$,

$$\beta^2 - p\alpha = \frac{p\left[\pm\sqrt{3p^2 + 2h^2} - p\right]}{2}.$$

Le lieu de M se compose donc de deux paraboles qui sont toujours distinctes.

16. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{ST_1}^2+\overline{ST_2}^2+\overline{SN_1}^2+\overline{SN_2}^2+\overline{SN_3}^2=\overline{FT_1}^2+\overline{FT_2}^2+\overline{FN_1}^2+\overline{FN_2}^2+\overline{FN_3}^2,$$

se compose de deux droites parallèles à l'axe de la parabole (P).

On trouve, en effet, en tenant compte des formules (1) (2) (3) (4)

$$\beta = \pm\frac{p}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

17. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$FT_1 + FT_2 = \text{constante},$$

est une parabole.

On a en effet, d'après (5)

$$\frac{2(\beta^2 - p\alpha)}{p} + p = \text{constante}.$$

18. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$FN_1 + FN_2 + FN_3 = \text{constante},$$

est une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole (P).

On a, d'après (6)

$$2\alpha - \frac{p}{2} = \text{constante}.$$

19. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$FT_1 + FT_2 + FN_1 + FN_2 + FN_3 = \text{constante}.$$

se compose de deux droites parallèles à l'axe de la parabole (P).

On trouve en effet, après avoir ajouté (5) et (6)

$$\frac{2\beta^2}{p} + \frac{p}{2} = \text{constante}.$$

20. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$FT_1 . FT_2 = \text{constante},$$

est un cercle.

La relation (7) donne

$$\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2 = \text{constante}.$$

C'est un cercle ayant son centre au foyer F.

21. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$FN_1 . FN_2 . FN_3 = \text{constante}.$$

est un cercle.

La relation (8) donne

$$\frac{p}{2}\left[\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2\right] = \text{constante}.$$

Elle représente encore un cercle ayant son centre au foyer F de la parabole donnée (P).

Remarque. — Des relations (7) (8) et (9), on déduit les suivantes, qui sont assez remarquables.

$$FT_1 \times FT_2 = \overline{FM}^2,$$

$$FN_1 . FN_2 . FN_3 = \frac{p}{2} . \overline{FM}^2,$$

et, comme conséquence,

$$\frac{FN_1 . FN_2 . FN_3}{FT_1 . FT_2} = \frac{p}{2}.$$

22. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{SN_1}^2 + \overline{SN_2}^2 + \overline{SN_3}^2 = FT_1 \times FT_2,$$

est une hyperbole équilatère.

On trouve, en égalant les relations (2) et (5),

$$\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha - \frac{9p^2}{4} = 0.$$

23. — *Le lieu des points* M *tels que*

$$\overline{FN_1}^2 + \overline{FN_2}^2 + \overline{FN_3}^2 = FT_1 . FT_2,$$

est une hyperbole equilatère.

En égalant les relations (4) et (7), on trouve

$$\alpha^2 - \beta^2 - p\alpha + \frac{p^2}{2} = 0.$$

24. — *Le lieu des points M tels que*

$$FN_1 . FN_2 + FN_2 . FN_3 + FN_3 . FN_1 = \text{constante},$$

se compose de deux droites perperdiculaires à l'axe de la parabole (P).

On a

$$FN_1.FN_2+FN_2.FN_3+FN_3.FN_1=\frac{(FN_1+FN_2+FN_3)^2-(\overline{FN_1}^2+\overline{FN_2}^2+\overline{FN_3}^2)}{2}.$$

De sorte, qu'en tenant compte des relations (4) et (6), on a

$$2\alpha^2-\frac{p^2}{2}=\text{constante}.$$

25. — *On considère une parabole* P *de sommet* S *est une droite* D *perpendiculaire à l'axe de la parabole. Si, d'un point quelconque* M *pris sur la droite* D, *on abaisse les trois normales à la parabole, dont les pieds sont* N_1, N_2, N_3, *on a*

$$\overline{SN_1}^2+\overline{SN_2}^2+\overline{SN_3}^2=\text{constante}.$$

La relation (2) met cette propriété en évidence.

ÉCOLE NORMALE

Concours de 1893.

Solution par M. Ch. Michel, élève au collège Chaptal.

1° *Les coordonnées des points d'une courbe* (C) *étant représentées par les formules*

$$x=\frac{2}{t-a},\qquad y=\frac{2}{t-b},\qquad z=\frac{2}{t-c},$$

où t *désigne un paramètre variable, et* a, b, c *sont trois constantes* différentes, *on considère tous les segments de droite dont les deux extrémités sont sur la courbe* (C) *et on demande de trouver la surface* (S), *lieu des milieux* M *de ces cordes.*

2° *Démontrer que la surface* (S) *contient la courbe* (C) *et ses trois asymptotes.*

3° *Montrer qu'à chaque point* M *de cette surface correspond une seule corde de la courbe* (C) *ayant son milieu en* M. *Discuter analytiquement et mettre ainsi en évidence trois droites tracées sur la surface* (S).

4° *Délimiter la région du plan des* xy *où doit se projeter un point* M *de la surface* (S) *pour que la corde dont ce point est le milieu joigne deux points réels de la courbe* (C).

5° *Trouver toutes les droites situées à distance finie sur la surface* (S).

6° *Trouver le lieu des cordes de la courbe* (C) *dont les milieux sont sur une droite.*

1° Si t' et t'' sont les paramètres des extrémités d'une corde de la cubique (C) et x, y et z les coordonnées du milieu M de cette corde, nous avons

$$(1) \quad x=\frac{1}{t'-a}+\frac{1}{t''-a}, \quad y=\frac{1}{t'-b}+\frac{1}{t''-b}, \quad z=\frac{1}{t'-c}+\frac{1}{t''-c}.$$

Les paramètres t' et t'' variant d'une façon arbitraire, le lieu de M est une surface (S).

Pour avoir son équation, chassons les dénominateurs dans les trois relations précédentes, qui peuvent alors s'écrire

$$(2) \quad xt't'' - (ax+1)(t'+t'') + a^2x + 2a = 0, \text{ etc...}$$

L'équation de la surface (S) est donc

$$\begin{vmatrix} x & ax+1 & a^2x+2a \\ y & by+1 & b^2y+2b \\ z & cz+1 & c^2z+2c \end{vmatrix} = 0.$$

L'ensemble des termes du plus haut degré étant

$$xyz \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix},$$

la surface (S) est du troisième degré.

2° Cette surface contient évidemment la cubique (C); il suffit de supposer que les paramètres des extrémités de la corde sont égaux, en d'autres termes que la corde est tangente à la courbe. D'ailleurs, transformons homographiquement. Le plan de l'infini devient un plan à distance finie, et, si une corde de la cubique coupe ce plan en I, le point M est le conjugué harmonique de I par rapport aux extrémités A et B. Si une corde AB devient tangente, deux des points de la division harmonique ABMI sont confondus, un troisième se confond donc avec A et B, et comme en général I ne coïncide pas avec A et B, il faut que ce soit le point M. — Si I coïncide avec A et B, c'est-à-dire si la tangente est la tranformée d'une asymptote, le quatrième point M de la division harmonique est indéterminé; par suite, tout point d'une asymptote de la cubique est un point de la surface (S).

3° Tout point M de la surface (S) est le milieu d'une corde de la cubique (C), d'après la définition de la surface (S); de plus, on sait qu'il n'y a qu'une droite passant par un point de l'espace et s'appuyant en deux points sur une cubique gauche. Donc, il n'y a qu'une seule corde de la cubique (C), ayant son milieu en M. On voit aussi que les droites qui sont sur la surface (S) ne peuvent être des cordes de la cubique (C), à moins que le point M ne soit indéterminé sur la droite, qui est alors une asymptote de la cubique.

Discutons analytiquement. Cherchons les paramètres des extrémités des cordes qui ont leur milieu en un point M de la surface (S). Si x, y, z sont les coordonnées de ce point, les trois équations (2), aux inconnues $t't''$ et $t' + t''$, se réduisent à deux, par exemple aux deux premières

$$xt't'' - (ax + 1)(t' + t'') + a^2x + 2a = 0,$$
$$yt't'' - (by + 1)(t' + t'') + b^2y + 2b = 0.$$

Si le déterminant des coefficients des inconnues n'est pas nul, le système admet une et une seule solution en $t't''$ et $t' + t''$ donnée par les formules de Cramer. Les paramètres t' et t'' sont donc racines d'une équation du deuxième degré, ce qui montre qu'il n'y a qu'une corde ayant son milieu en M.

Le déterminant des coefficients des inconnues est nul. Remarquons que ces coefficients ne peuvent être tous nuls à la fois. Prenons un coefficient non nul et supposons que le caractéristique correspondant ne soit pas nul. Alors le système est impossible. En réalité, l'une des inconnues au moins, $t't''$ ou $t' + t''$, prend une valeur infinie, et, par suite, l'un au moins des paramètres $t't''$ est infini. Donc l'une des extrémités des cordes qui ont leur milieu en M est l'origine O. Dans ce cas encore, il n'y a qu'une corde qui est la droite OM. Le lieu de M est par suite la courbe (C'), homothétique dans le rapport 1 : 2 à la cubique (C), relativement à l'origine.

C'est ce qu'exprime précisément, égalé à zéro, le déterminant des coefficients des inconnues. En effet, la courbe représentée par l'équation ainsi obtenue n'est autre que l'hyperbole équilatère (H'), homothétique par rapport à l'origine et dans le rapport 1 : 2 à l'hyperbole (H), projection de la cubique

(C). Cherchons les points de la surface (S) qui se projettent sur cette hyperbole. Une corde de la cubique (C), qui a son milieu en M, se projette suivant une corde de l'hyperbole (H), qui a son milieu en M', projection de M sur l'hyperbole (H'). Mais par un point du plan d'une conique ne passe en général qu'une corde qui a son milieu en ce point, à moins qu'il ne soit le centre de la conique. Pour un point M' de l'hyperbole (H'), la corde est évidemment la droite OM', qui est la projection d'une corde de la cubique (C) passant par l'origine. Le point M est par suite sur la cubique (C').

Nous avons mis en évidence par ce raisonnement le cas exceptionnel où le point M se projette au centre ω de l'hyperbole (H). Dans ce cas, toutes les droites passant par ω sont les projections de cordes de la cubique (C) dont le milieu se projette en ω, et, comme à chacune de ces droites correspond un point M sur la verticale ω, cette verticale ω est une droite de la surface (S).

Nous allons retrouver ce résultat en continuant notre discussion analytique. Supposons que le déterminant caractéristique soit nul. Alors les deux équations se réduisent à une seule; le système des deux équations a donc une infinité de solutions en $t't''$ et $t' + t''$, et, par suite, en t' et t''. Il y a par conséquent une infinité de cordes de la cubique (C), dont les milieux ont pour coordonnées les valeurs particulières de x et de y qui annulent le déterminant des coefficients des inconnues, et qui, n'annulant pas un de ces coefficients, annulent aussi le déterminant caractéristique correspondant. Le point, dans le plan des xy, qui a pour coordonnées ces valeurs de x et de y, est commun à deux hyperboles équilatères qui, ayant mêmes directions asymptotiques, n'ont que deux points communs à distance finie, et dont les équations sont

$$\text{(H')} \qquad x(by + 1) - y(ax + 1) = 0,$$

avec

$$(\alpha) \qquad x(b^2y + 2b) - y(a^2x + 2a) = 0,$$

ou

$$(\beta) \qquad (ax + 1)(b^2y + 2b) - (by + 1)(a^2x + 2a) = 0.$$

Les points communs à (H') et à (α) sont l'origine et le point ω.

Les points communs à (H′) et à (β) sont le point ω et le point

$$x = -\frac{1}{a}, \quad y = -\frac{1}{b}.$$

Le seul qui convienne dans notre discussion est le point ω, centre de l'hyperbole (H). Les coordonnées de ce point rendant les quantités $x, ax+1, a^2x+2a$, proportionnelles aux quantités correspondantes y, $by + 1$, $b^2y + 2b$, la verticale ω est une droite de la surface (S).

Prenons un point M sur cette verticale; les trois équations (2) se réduisent à deux, qui sont nécessairement la première et la troisième

$$xt't'' - (ax + 1)(t' + t'') + a^2x + 2a = 0,$$
$$zt't'' - (cz + 1)(t' + t'') + c^2z + 2c = 0.$$

Par la même discussion que précédemment, nous voyons qu'il n'y a qu'une corde de la cubique (C) qui a son milieu en M. Nous arrivons en dernier lieu au cas où les deux équations se réduisent à une seule; d'après ce qui précède. le point M doit se projeter au centre ω′ de l'hyperbole, projection de la cubique (C), sur le plan des xz. Mais les abscisses de ω et de ω′ étant différentes, puisque c et b sont différents, ce cas est impossible. Dans tous les cas, par conséquent, il n'y a qu'une seule corde de la cubique (C) ayant son milieu en un point quelconque de la surface (S).

4° Revenons aux deux équations qui déterminent $t't''$ et $t' + t''$, en fonction de x et de y. Nous pouvons en général former l'équation du second degré qui fournit t' et t''. Dans le cas où le déterminant des coefficients des inconnues est nul, c'est-à-dire dans le cas où M se projette sur l'hyperbole (H′), cette équation s'abaisse au premier degré, et, quand M se projette en ω, elle n'existe pas. M se projetant sur (H′), les extrémités de la corde correspondante sont des points réels ; M se projetant en ω, les extrémités de la corde qui passe par M peuvent être réelles ou imaginaires, car nous pouvons mener par ω des cordes de l'hyperbole (H) qui la rencontrent en des points réels ou imaginaires. Le point ω est donc un point singulier de la ligne de séparation cherchée.

Pour tout point M qui se projette sur cette ligne, l'équation

en t a ses racines égales; les deux extrémités de la corde correspondante sont donc confondues, cette corde est nécessairement une tangente à la cubique (C). Comme nous l'avons vu, tant que cette tangente n'est pas une asymptote, le point M correspondant est le point de contact; si elle est asymptote, le point correspondant est un point quelconque situé sur elle. La ligne de séparation se compose donc de la projection de la cubique (C) et des asymptotes. Il convient d'observer que le point où se projette l'asymptote parallèle à Oz n'a toutefois rien de particulier; c'est un point de l'hyperbole H et il doit être considéré comme la projection du point de la cubique (C) à l'infini dans la direction Oz.

Nous retrouvons ces résultats par le calcul. Faisons, en effet, $t'' = t'$ dans les équations en x et y; nous avons :

$$xt'^2 - 2(ax + 1)t' + a^2x + 2a = 0,$$
$$yt'^2 - 2(by + 1)t' + b^2y + 2b = 0,$$

ou

$$(t' - a)[(t' - a)x - 2] = 0,$$
$$(t' - b)[(t' - b)y - 2] = 0.$$

La ligne de séparation s'obtient en éliminant t' entre les deux relations précédentes. La forme sous laquelle nous les avons mises nous permet de voir qu'elle se décompose en les droites qui ont pour équations : $x = \frac{2}{b - a}$ et $y = \frac{2}{a - b}$, et qui sont les projections des asymptotes parallèles au plan des xy; — et en la courbe dont les points ont pour coordonnées

$$x = \frac{2}{t - a}, \qquad y = \frac{2}{t - b},$$

t étant un paramètre arbitraire, c'est-à-dire en l'hyperbole (H).

Cela posé, si la corde qui passe en M joint deux points réels de la cubique, sa projection rencontrera l'hyperbole (H) en deux points réels, et réciproquement. Donc, si la projection M′ de M est dans la région du centre par rapport à l'hyperbole, elle doit être dans l'angle des asymptotes qui ne contient pas la courbe.

Si M′ est dans la région comprise entre les asymptotes et la courbe (H), la corde correspondante rencontre la courbe en deux points imaginaires. Pour les points de la partie restante

du plan, la corde correspondante la coupe en deux points réels.

3° L'ensemble des termes de plus haut degré, dans l'équation de la surface (S), nous montre que, s'il y a des génératrices sur la surface (S), elles sont parallèles aux plans de coordonnées. Menons alors par une génératrice le plan parallèle à l'un d'eux : la section de la surface par ce plan se compose de la droite de l'infini, de la génératrice considérée, et, par conséquent, d'une troisième droite. Les directions asymptotiques de la section s'obtiennent en coupant par le plan les plans coordonnés, comme le montre l'équation. Il en résulte immédiatement que les génératrices de la surface sont parallèles aux axes de coordonnées.

Soient donc x et y les coordonnées du pied d'une génératrice parallèle à oz. L'équation aux z des points d'intersection doit être indéterminée. Elle est, en général, du premier degré. Écrivons alors que le coefficient de z et le terme indépendant sont nuls. Le premier s'obtient en divisant par z et en faisant z infini, le second s'obtient en faisant z égal à o. Nous avons donc les deux relations en x et y suivantes :

$$\begin{vmatrix} x & ax+1 & a^2x+2a \\ y & by+1 & b^2y+2b \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & ax+1 & a^2x+2a \\ y & by+1 & b^2y+2b \\ 0 & 1 & 2c \end{vmatrix} = 0.$$

Les pieds des génératrices sur le plan des xy sont à l'intersection des courbes représentées par les équations précédentes qui sont des hyperboles équilatères ayant pour directions asymptotiques les axes de coordonnées. Ces hyperboles se rencontrent donc, au plus, en deux points à distance finie qui sont nécessairement le point ω, considéré plus haut, et le pied de l'asymptote à la cubique (C), parallèle à Oz.

La surface (S) admet donc déjà six droites à distance finie.

Mais nous avons supposé pour obtenir ces droites que la section par le plan parallèle au plan xoy est du second degré. Or, pour une position particulière du plan, le coefficient de xy disparaît. Nous obtenons, en faisant cette hypothèse, une nouvelle droite sur la surface (S).

En effet, l'équation développée de la surface étant

$$(a-b)(a-c)(b-c)xyz-(a-b)(a+b-2c)xy+(a-c)(a+c-2b)xz$$
$$-(b-c)(b+c-2a)yz+2(b-c)x-2(a-c)y+2(a-b)z=0,$$

nous avons, en annulant le coefficient de xy,

$$(c-a)(c-b)z = a + b - 2c,$$

et la droite de la surface contenue dans ce plan est déterminée par le plan dont l'équation est

$$(c-b)^2 y + (c-a)^2 z + 2(a + b - 2c) = 0.$$

Nous avons ainsi un groupe de trois autres droites.

6° Considérons d'abord une asymptote de la cubique (C). La corde dont un point à distance finie sur cette droite est le milieu est, comme on l'a vu, l'asymptote elle-même. Si nous prenons le point à l'infini de l'asymptote, toutes les droites parallèles à l'asymptote et s'appuyant sur la cubique (C) doivent être considérées comme ayant leur milieu en ce point. Le lieu des cordes de la cubique (C) dont le milieu est sur une asymptote est donc le cylindre projetant la cubique parallèlement à cette droite.

Considérons maintenant une droite telle que la parallèle à Oz menée par ω qui est l'axe du cylindre précédent. Ses équations sont, par exemple,

$$x = \frac{2}{b-a}, \qquad y = \frac{2}{a-b}.$$

Soient t' et t'' les paramètres des extrémités d'une corde s'appuyant sur la droite. Ses équations sont

$$\frac{x - \dfrac{2}{t'-a}}{\dfrac{2}{t''-a} - \dfrac{2}{t'-a}} = \frac{y - \dfrac{2}{t'-b}}{\dfrac{2}{t''-b} - \dfrac{2}{t'-b}} = \frac{z - \dfrac{2}{t'-c}}{\dfrac{2}{t''-c} - \dfrac{2}{t'-c}}.$$

Posons ces rapports égaux à λ. Les coordonnées d'un point quelconque de la corde ont donc pour expression :

$$x = \frac{2\lambda}{t''-a} + \frac{2(1-\lambda)}{t'-a}, \quad y = \frac{2\lambda}{t''-b} + \frac{2(1-\lambda)}{t'-b}, \quad z = \frac{2\lambda}{t''-c} + \frac{2(1-\lambda)}{t'-c}.$$

En exprimant que le milieu de la corde est sur la droite donnée, nous avons deux relations entre t' et t'', qui se réduisent nécessairement à une, comme nous l'avons vu :

$$\frac{2}{b-a} = \frac{1}{t'-a} + \frac{1}{t''-a}.$$

Le lieu des cordes s'obtient donc en éliminant t', t'' et λ entre les quatre dernières relations. Pour effectuer l'élimina-



tion, écrivons les trois premières de la manière suivante,

$$xt't'' - ax(t' + t'') + a^2x + 2a = 2\lambda t' + 2(1 - \lambda)t''$$
$$yt't'' - by(t' + t'') + b^2y + 2b = 2\lambda t' + 2(1 - \lambda)t''$$
$$zt't'' - cz(t' + t'') + c^2z + 2c = 2\lambda t' + 2(1 - \lambda)t''.$$

La quatrième peut s'écrire

$$\frac{2}{b - a} t't'' - \left(\frac{2a}{b - a} + 1\right)(t' + t'') + \frac{2a^2}{b - a} + 2a = 0.$$

Nous avons ainsi quatre équations du premier degré aux inconnues $t't''$, $t' + t''$, et $2\lambda t' + 2(1 - \lambda)t''$.

L'équation du lieu cherché est par conséquent :

$$\begin{vmatrix} x & ax & a^2x + 2a & 1 \\ y & by & b^2y + 2b & 1 \\ z & cz & c^2z + 2c & 1 \\ 2 & b+a & 2ab & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant,

$$xz(c - a)^2 + yz(c - b)^2 - xy(a - b)^2 + 2x(c - b)$$
$$+ 2y(c - a) + 2z(b + a - 2c) = 0.$$

Le lieu est un hyperboloïde à une nappe qui contient la droite donnée et les deux asymptotes de la cubique (C) qu'elle rencontre.

Cherchons maintenant le lieu des cordes de la cubique (C) qui s'appuient sur une droite du troisième groupe ; par exemple, sur celle qui est parallèle au plan yoz. Le calcul qui le fournit est analogue au précédent. Pour exprimer que la corde s'appuie sur la droite, il suffit d'exprimer que son milieu est dans le plan parallèle à yoz, qui contient la droite. En effet, la condition étant remplie, le milieu est sur l'intersection de ce plan et de la surface (S), c'est-à-dire sur la droite considérée.

Cette relation est

$$\frac{1}{t' - a} + \frac{1}{t'' - a} = \frac{b + c - 2a}{(a - b)(a - c)};$$

elle peut s'écrire

$$(b + c - 2a)t't'' - (bc - a^2)(t' + t'') - a(ab + ac - 2bc) = 0.$$

L'équation du lieu est donc :

$$\begin{vmatrix} x & ax & a^2x + 2a & 1 \\ y & by & b^2y + 2b & 1 \\ z & cz & c^2z + 2c & 1 \\ (b+c-2a) & (bc-a^2) & -a(ab+ac-2bc) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant, nous obtenons :

$$(a-b)^2xy-(a-c)^2xz+2(b-c)x+2(a-b)y-2(a-c)z=0.$$

Le lieu est donc un paraboloïde hyperbolique.

QUESTION 350

Solution par M. LEBESGUE, élève au lycée Louis-le-Grand.

---

350. — *On considère une ellipse* Γ *et le cercle* Δ *inscrit au losange formé par les sommets de* Γ. *D'un point* M, *mobile sur* Γ, *on peut mener à* Δ *deux tangentes qui touchent* Δ *: l'une en* P *; l'autre en* Q. *Les axes de* Γ *coupent les droites* MP, MQ *respectivement aux points* P', Q'. *Démontrer que le rapport* $\frac{PP'}{QQ'}$ *est constant.* (G. L.)

Soient

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

l'équation de Γ et x, y les coordonnées de M.

Les équations de Δ et de PQ sont :

$$(2)\qquad \begin{cases}(a^2+b^2)(X^2+Y^2)-a^2b^2=0,\\ (a^2+b^2)(Xx+Yy)-a^2b^2=0.\end{cases}$$

X, Y étant les coordonnées courantes.

Soient (x', y') ; (x'', y'') les coordonnées de P et de Q; elles sont racines des équations :

$$(3)\qquad \begin{cases}(a^2+b^2)(x^2+y^2)X^2-2a^2b^2(a^2+b^2)Xx+a^2b^4(x^2-y^2)=0,\\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)Y^2-2a^2b^2(a^2+b^2)Yy+a^4b^2(y^2-x^2)=0.\end{cases}$$

Les droites MP, MQ ont, respectivement, pour équations

$$\frac{X-x'}{Y-y'}=\frac{x-x'}{y-y'},\qquad \frac{X-x''}{Y-y''}=\frac{x-x''}{y-y''}.$$

Les coordonnées des points P', Q', sont donc

$$P':\quad X=0,\qquad Y=\frac{xy'-x'y}{x-x'};$$

$$Q':\quad X=\frac{x''y-xy''}{y-y''},\quad Y=0.$$

On a donc

$$\left(\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{QQ'}}\right)^2 = \frac{x'^2 + \left(y' - \dfrac{xy' - x'y}{x - x'}\right)^2}{\left(x'' - \dfrac{x''y - xy''}{y - y''}\right)^2 + y''^2}$$

$$= \frac{x'^2(y - y'')^2}{y''^2(x - x')^2} \times \frac{x^2 + y^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2}{x^2 + y^2 - 2(xx'' + yy'') + x''^2 + y''^2}.$$

Les équations (2) prouvent que le dernier rapport vaut 1, d'où, en ne prenant que la valeur positive :

$$\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{QQ'}} = \pm \frac{x'(y - y'')}{y''(x - x')}.$$

Tirons x' de la dernière des équations (2) en tenant compte de la relation (1) et en remplaçant $(y' + y'')$, $y'y''$ par leurs valeurs tirées de (3), on obtient :

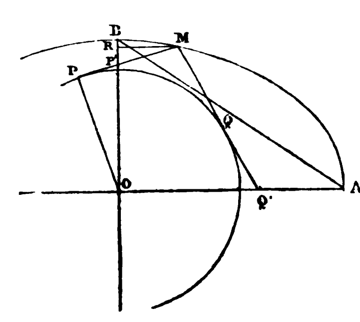
$$\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{QQ'}} = \pm \frac{a^2b^4y^2 - (a^2+b^2)b^2y(y^2y' + x^2y'')}{-a^4b^2y^2 + (a^2+b^2)a^2y(y^2y' + x^2y'')} = \frac{b^2}{a^2} = \text{constante}.$$

Deuxième solution. — Soient

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation de Γ et x, y les coordonnées de M.

Le carré du rayon de Δ est $\dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.



Les triangles semblables OPP', MP'R donnent

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MR}} = \frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{RP'}} = \frac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{MP'}} = \frac{\mathrm{OR} - \mathrm{RP'}}{\mathrm{MP} - \mathrm{PP'}} = \frac{\mathrm{OR} + (\mathrm{PP'} - \mathrm{RP'})}{\mathrm{MP} - (\mathrm{PP'} - \mathrm{RP'})}.$$

D'où

$$\mathrm{PP'} - \mathrm{RP'} = \frac{\mathrm{MP} \times \mathrm{OP} - \mathrm{MR} \times \mathrm{OR}}{\mathrm{MR} + \mathrm{OP}},$$

et comme

$$\frac{\mathrm{PP'}}{\mathrm{PP'} - \mathrm{RP'}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP} - \mathrm{MR}},$$

$$\mathrm{PP'} = \frac{\mathrm{OP}(\mathrm{MP} \times \mathrm{OP} - \mathrm{MR} \times \mathrm{OR})}{\overline{\mathrm{OP}}^2 - \overline{\mathrm{OR}}^2}.$$

On trouverait de même :

$$QQ' = -\frac{OQ(MQ \times OQ - MR \times OR)}{\overline{OP}^2 - \overline{OR}^2}.$$

en tenant compte de la relation (1).

On en tire

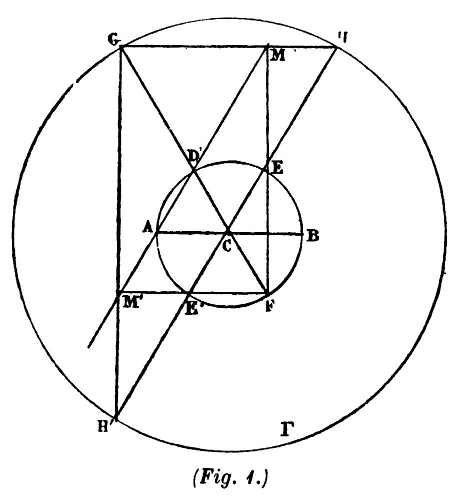
$$\frac{PP'}{QQ'} = -\frac{\overline{OP}^2 - \overline{OR}^2}{\overline{OP}^2 - \overline{MR}^2} = \frac{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} - y^2}{-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + x^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Donc $$\frac{PP'}{QQ'} = \text{constante}.$$

QUESTION 358 (*)

Solution par Mme Vve F. Prime.

Si, par le point de rebroussement A d'une cardioïde, on mène trois droites inclinées l'une sur l'autre de 60°, les droites rencontrent chacune la cardioïde en deux points M, M', autres que A. Les tangentes en ces points sont rectangulaires et elles se coupent en un point G dont le lieu est une circonférence.



(Fig. 1.)

Soient :

A, le point de rebroussement de la cardioïde;

C, le centre et AB, un diamètre du cercle directeur;

(*) Marquée 431 (1892, p. 216) par erreur.

AM, une sécante issue de A;

M,M′, les points où la sécante AM rencontre la cardioïde; et D, le point où elle coupe la circonférence directrice.

On sait que $$DM = DM' = AB.$$

Si EE′ est le diamètre du cercle directeur, mené parallèlement à MM′, les droites ME, M′E′ sont, comme on le sait, normales à la cardioïde aux points M, M′. Les droites ME, M′E′, CD sont concourantes et, si F est leur point de concours, DC = CF; le point F se trouve donc sur la circonférence directrice de la cardioïde; comme EE′ est parallèle à MM′ et égal à la moitié de MM′, l'angle MFM′ est droit.

Achevons le rectangle MFM′G, la diagonale FG de ce rectangle passe par D, et CG = 3CF. Le lieu de G est donc la circonférence Γ décrite de C, comme centre, avec 3.CA pour rayon.

Remarques. — I. Les droites GM, GM′ rencontrent Γ, sur EE′, aux points H, H′.

II. Si l'on considère trois sécantes AM_1, AM_2, AM_3, inclinées l'une sur l'autre à 60°, les points G_1, G_2, G_3 correspondants sont les sommets d'un triangle équilatéral, de grandeur constante. En général, si l'on mène n sécantes AM_1, AM_2, ..., AM_n inclinées l'une sur l'autre de $\frac{\pi}{n}$, les points G_1, G_2, ..., G_n sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, dont la grandeur est indépendante de l'orientation de la sécante AM_1.

Note (*). — On sait que la podaire du cercle, pour un point P pris sur la circonférence, est une cardioïde ayant P comme point de rebroussement. Soit P B une transversale quelconque menée par P, et soit A′B′ le diamètre du cercle générateur qui lui est parallèle. Les tangentes en A′ et B′, à la circonférence, coupent la transversale en A et B. Ce sont, abstraction faite de P, les deux points d'intersection de cette

(*) Cette Note est de M. Droz-Farny.

droite avec la cardioïde. Soit C la projection de C sur A'B'. D'après un théorème connu, la droite CA divisant A'P en parties égales sera normale à la cardioïde en A; de même CB est la normale en B.

Mais, évidemment :

$\widehat{ACB} = \widehat{A'PB'} = 90^\circ$.

Les normales étant orthogonales, il en est de même des tangentes.

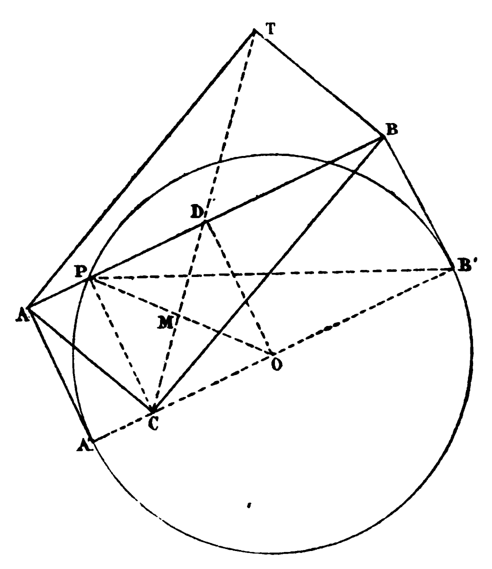


Fig. 2.

Dans le rectangle ACBT, le point d'intersection des diagonales est évidemment le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur AB. Il en résulte CD = DT, et dans le rectangle PCOD MC = MD.

Donc $$MT = 3MC = 3MO = \frac{3PO}{2}.$$

Le théorème de M. Barisien peut donc être modifié et complété comme il suit :

Théorème. — *Toute droite passant par le point de rebroussement d'une cardioïde rencontre la courbe en deux autres points. Les tangentes en ces points sont perpendiculaires l'une sur l'autre et le lieu de leur point d'intersection est une circonférence dont le centre est le milieu de la droite qui joint le point donné au centre du cercle générateur de la courbe. Le lieu du point d'intersection des normales aux deux points précédents est une circonférence concentrique à la précédente. Les rayons des circonférences* T *et* N *et de la circonférence* O *sont liés par les proportions*

$$T : O : N = 3 : 2 : 1.$$

QUESTION 365

Solution par Mme Veuve F. PRIME.

On décrit des cercles sur les ordonnées d'une ellipse, comme diamètres. Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à deux cercles consécutifs. (N. Greenstreet.)

Si le point M, d'ordonnée MP, décrit l'ellipse

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4b^2} - 1 = 0,$$

le milieu *m* de MP a, pour lieu, l'ellipse

$$(e) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'axe radical Δ des circonférences décrites sur MP et sur l'ordonnée voisine M'P', devant passer par le milieu de PP' et être perpendiculaire sur *mm'*, se confond avec la perpendiculaire abaissée de P sur la tangente menée au point *m* de l'ellipse (*e*).

Soient $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ les coordonnées de *m*; l'équation de Δ peut s'écrire

$$\frac{x}{b} - \frac{a}{b}\cos\varphi - \frac{y}{a}\operatorname{cotg}\varphi = 0,$$

ou

$$\frac{x}{b}\operatorname{tg}\varphi - \frac{a}{b}\sin\varphi - \frac{y}{a} = 0.$$

Il en résulte que Δ touche son enveloppe au point de coordonnées

$$x = a\cos^3\varphi, \qquad y = -\frac{a^2}{b}\sin^3\varphi.$$

Ainsi l'élément polaire de l'aire cherchée S a pour expression

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = -\frac{3a^3}{2b}.\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

On a donc

$$S = -\frac{6a^3}{b}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi = \frac{6a^3}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\varphi - \sin^4\varphi]\,d\varphi$$

$$= \frac{6a^3}{b}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16}\right] = \frac{3\pi a^3}{8b}.$$

Nota. — Autres solutions par MM. Grolleau et Barisien.

QUESTION 372

Solution par Mme Ve F. Prime.

D'un point quelconque A, *d'une ellipse donnée, on abaisse les trois normales* AB, AC, AD. *Si le point* A *se déplace sur l'ellipse, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit au triangle* BCD *décrivent, chacun, une ellipse.* (Barisien.)

Si x_1, y_1 sont les coordonnées du point A de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

l'équation de la circonférence BCD est

$$\Gamma \equiv x^2 + y^2 - \frac{b^2}{a^2}xx_1 - \frac{a^2}{b^2}yy_1 - (a^2 + b^2) = 0.$$

Le lieu du centre de cette circonférence résulte donc de l'élimination des paramètres x_1, y_1, entre les équations

$$2x - \frac{b^2}{a^2}x_1 = 0, \qquad 2y - \frac{a^2}{b^2}y_1 = 0, \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

On trouve ainsi l'ellipse

$$\frac{4a^2x^2}{b^4} + \frac{4b^2y^2}{a^4} = 1.$$

Pour obtenir le centre de gravité X, Y du triangle BCD, observons que Γ coupe E en un quatrième point A′, diamétralement opposé à A, et que l'équation aux abscisses des

points A, B, C, D est

$$x^4 - \frac{2b^2x_1}{c^2}x \ldots = 0.$$

Il en résulte que $$3X = \frac{(a^2 + b^2)x_1}{c^2},$$

et que $$3Y = -\frac{(a^2 + b^2)y_1}{c^2}.$$

Le lieu du point X, Y est donc l'ellipse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{9c^4}.$$

Nota. — Solution analogue par MM. Grolleau et Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

392. — On donne une hyperbole; on lui mène une tangente qui rencontre en a l'une des asymptotes A. D'un point b de cette tangente on lui élève une perpendiculaire bc qui coupe A au point c. On demande le lieu des points tels que b, lorsque la tangente, variant de position, les triangles comme abc restent d'aire constante?

Déterminer géométriquement la normale en un point de ce lieu? *(Mannheim.)*

393. — Démontrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2x dx}}{\cos^3 x} = \frac{\pi}{4}.$$

(E-N. Barisien.)

RECTIFICATIONS

Page 79, l. 13, *au lieu de* foliums, *lisez* trifoliums.
Page 79, l. 18, *au lieu de* hyperboles, *lisez* hyperboles équilatères.
(Il s'agit, bien entendu, des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle.)

Le Directeur-Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8504-5-94.

SUR LES COURBES
QUI COUPENT UN RÉSEAU DONNÉ EN DES POINTS DE MÊME COURBURE

Par M. **Émile Lemoine.**

La courbe dont l'équation est $\rho = R \sin 2\omega$ *jouit de la propriété suivante. Elle coupe toutes les hyperboles équilatères* $\rho^2 = \dfrac{\lambda^2}{\sin 2\omega}$ *en des points où le rayon de courbure de ces hyperboles est constant.*

La propriété énoncée se démontre en faisant les calculs nécessaires pour résoudre le problème plus général :

Soient une série de courbes dont l'équation est : $\varphi(x, y, c) = 0$ *où* c *est un paramètre variable. On demande le lieu des points* M *de chacune de ces courbes où le rayon de courbure a une valeur constante* L *donnée.*

Comme on a $$L = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2ydx - d^2xdy},$$

il suffira évidemment d'éliminer c entre cette équation et l'équation $\varphi(x, y, c) = 0$ pour avoir le lieu demandé.

Si la série des courbes considérées est représentée par
$$xy = c^2,$$
on trouve facilement que le lieu des points où le rayon de courbure est égal à R est représenté par l'équation
$$\frac{(x^2 + y^2)^3}{4x^2y^2} = R^2,$$
qui, transformée en coordonnées polaires ayant l'origine pour pôle et pour axe l'axe des x, montre la vérité du théorème énoncé.

Cette courbe est une rosace à quatre branches que l'on rencontre assez souvent en géométrie, soit sous cette forme, soit sous la forme $\rho = R \cos 2\omega$ (voir, par exemple, M. Aubry, *J. S.*, 1893, p. 173, ligne 1, en remontant). Il est clair qu'en

étudiant diverses courbes $\varphi(x, y, c) = o$, on doit arriver à quelques résultats intéressants dans cette voie.

Proposons-nous, par exemple, la question suivante :

Étant donnée une série de courbes semblables $\rho = cF(\omega)$, *dont le pôle est le centre de similitude, trouver le lieu des points* M *sur ces courbes, dont le rayon de courbure a une valeur* R.

Pour toutes les courbes, on a

$$R = \Psi(\rho, c),$$

donc

$$dR = \frac{dR}{dc} \cdot dc + \frac{dR}{d\rho} d\rho = o.$$

$\frac{dR}{dc} dc$ est l'accroissement du rayon de courbure quand c croît seul, si M'' est le point ou OM rencontre la courbe infiniment voisine. Cet accroissement est $R \cdot \frac{MM''}{OM}$, puisque toutes les courbes sont semblables. $\frac{dR}{d\rho} \cdot d\rho$, c'est l'accroissement du rayon de courbure quand c reste constant; c'est donc : $Pd\alpha$, P étant le rayon de courbure de la développée, et $d\alpha$ l'angle de contingence.

Il faut donc éliminer c entre

$$R = \psi(\rho, c) \quad \text{et} \quad R.MM'' + P.OMd\alpha = o.$$

Or, on a

$$d\alpha = \frac{ds}{R};$$

d'où

$$R^2MM'' + P\rho ds = o;$$

c se trouve éliminé par l'homogénéité.

$\frac{MM''}{ds}$ étant ainsi déterminé, la tangente au lieu cherché, en M, est la diagonale MM′ du parallélogramme construit sur MM″ et $MM_1 = ds$.

D'un autre côté, si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par n l'angle que fait la courbe $\rho = cF(\omega)$ avec OM et par θ, l'angle que fait MM′ avec OM, on a

$$\frac{MM''}{ds} = \frac{\sin(\theta + u - \pi)}{\sin\theta};$$

d'où $$R^2 \sin(\theta + u) - P\rho \sin\theta = 0;$$

mais $$\operatorname{tg}\theta = \frac{R^2 \sin u}{R.\rho + R^2 \cos u}.$$

Si $r = \varphi(\omega)$ est l'équation cherchée, on a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{r}{r'}$$

donc $$\frac{r}{r'_\omega} = \frac{R^2 \sin u}{P\rho + R^2 \cos u}.$$

D'un autre côté, $\operatorname{tg} u = \frac{\rho}{\rho'_\omega}$, d'où $\cos u = \frac{\rho'_\omega}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\omega}}$,

Donc, enfin, $$\frac{r}{r'_\omega} = \frac{R^2\rho}{P\rho\sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\omega} + R^2 \rho'_\omega}.$$

r'_ω, ρ'_ω représentent les dérivées de r et de ρ par rapport à ω, d'où l'on tire, en intégrant :

$$r = Ae^{\int\left(\frac{P\rho\sqrt{\rho^2+\rho'^2_\omega}}{R^2\rho} + \frac{\rho'_\omega}{\rho}\right)d\omega}$$

ou $$r = A\rho.R.$$

C'est le résultat cherché. A est une constante qui détermine la courbe que l'on veut obtenir. On voit, — ce que l'on peut prévoir *a priori*, — que toutes ces courbes sont semblables.

A titre d'exercices, le lecteur pourra vérifier les résultats suivants :

Courbe proposée.	*Courbe correspondante.*
$y^2 = 2cx.$ (*Parabole.*)	$4R^2x^2y^2 = (y^2 + 4x^2)^3$ ou $\rho = \frac{2R \sin 2\omega}{(1 + 3\cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}}$,
$\rho = c\omega.$ (*Spirale d'Archimède.*)	$\rho = R\frac{\omega(\omega^2 + 2)}{(1 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}}$,
$\rho\omega = c.$ (*Spirale hyperbolique.*)	$\rho = R\left(\frac{\omega^2}{1 + \omega^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$

RECHERCHE DE COURBES PLANES
QUARRABLES OU RECTIFIABLES
sans autres transcendantes que les logarithmes et les arcs de cercle

Par M. **Aubry**.

I. — Courbes quarrables.

1. — Soit la courbe $F(x, y) = 0$. Si l'équation peut se réduire à la forme $y = X$, X désignant une fonction de x, on aura $A = \int X dx$, et la courbe sera quarrable si cette intégrale peut se déterminer. Soit par exemple la courbe $ay^m + bx^n + c = 0$. On trouve

$$ydx = \left(\frac{-c + bx^n}{a}\right)^{\frac{1}{m}} dx$$

différentielle intégrable si n est l'inverse d'un nombre entier, ou si $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ est entier.

Ainsi les courbes

$$ay^m + b\sqrt[k]{x} = c, \qquad ay^m + b\sqrt[km-1]{x^m} = c$$

sont quarrables, quels que soient a, b, c, m, pourvu que k soit entier. Telles sont les courbes suivantes

$$ay^m + bx = c, \quad ay^m + \frac{b}{x} = c, \quad ay^m + b\sqrt{x} = c. \quad ay^m + bx\sqrt[m-1]{x} = c.$$

2. — Si l'équation peut se mettre sous la forme $x = Y$, Y désignant une fonction de y, on aura

$$A = \int ydx = \int yY'dy,$$

expression qui ne contient plus que la variable y.

Telle est la tractrice

$$x = L\,\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} - \sqrt{1 - y^2}.$$

On pourrait aussi chercher la surface $\int xdy = \int Ydy$ comprise entre la courbe et l'axe des y.

3. — Quelquefois on arrive à quarrer par certaines différen-

tiations. Ainsi soit le folium $x^3 + y^3 - xy = 0$. Différentions et multiplions par y, il vient

$$3x^2ydx + 3y^3dy - xydy - y^2dx = 0.$$

Remplaçons y^3 par $xy - x^3$, il vient après plusieurs transformations faciles

$$6ydx = 3(xdy + ydx) - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2}$$

d'où, en intégrant, $6A = 3xy - \dfrac{y^2}{x}$.

Cette quadrature a été donnée par le marquis de l'Hospital dans une lettre à Huyghens, de 1693.

4. — Quand l'équation peut se remplacer par deux autres en fonction d'une troisième variable u, la recherche se trouve simplifiée. Par exemple, si on peut poser

$$y = \mathrm{U}, \qquad x = \Upsilon.$$

U et Υ désignant des fonctions de u, on a

$$ydx = \mathrm{U}\Upsilon'du.$$

Ainsi, soit la cycloïde $x = u - k \sin u$, $y = 1 - k \cos u$, on aura

$$\mathrm{U} = \Upsilon' = 1 - k \cos u$$

d'où $dA = (1 - 2k \cos u + k^2 \cos^2 u)du.$

On trouvera de même la quadrature analytique de l'épicycloïde

$$x = \cos u - a \cos ku, \qquad y = \sin u - a \sin ku$$

et de la développante de cercle

$$x = \cos u + u \sin u, \qquad y = \sin u - u \cos u.$$

5. — Le plus souvent la transformation n'est pas évidente et il faut une étude particulière de chaque cas.

Par exemple, soit la courbe

$$\frac{y + x}{2} = \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

On peut poser $u = 2\sqrt{x} + x = 2\sqrt{y} - y$, ce qui donne

$$y = (\sqrt{1 - u} + 1)^2 = 2 + 2\sqrt{1 - u} - u,$$
$$x = (\sqrt{1 + u} - 1)^2 = 2 - 2\sqrt{1 + u} + u.$$

Par suite, $dx = du - \dfrac{du}{\sqrt{1 + u}}$;

d'où $dA = (2 + 2\sqrt{1-u} - u)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+u}}\right) du.$

6. — Soit encore la rosace à quatre branches $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$. Posons

$$x = v\cos u, \qquad y = v\sin u;$$

on aura

$$(\alpha) \qquad 2xy = v^2 \sin 2u.$$

$$(\beta) \qquad x^2 + y^2 = v^2.$$

Élevant (β) au cube, (α) au carré et égalant, on trouve

$$v = \sin 2u.$$

L'équation peut donc se remplacer par les suivantes

$$(\gamma) \qquad x = \sin 2u \cos u, \qquad y = \sin 2u \sin u;$$

d'où successivement

$$dx = 2\cos 2u \cos u du - \sin 2u \sin u du,$$

$$4ydx = 4\sin^2 2u \cos 2u du - 4\sin^2 2u \sin^2 u du,$$

$$= 6\sin^2 2u \cos 2u du - 2\sin^2 2u du,$$

$$= 3\sin^2 2u d(\sin 2u) - \sin^2 2u d(2u).$$

On trouve, en intégrant,

$$4A = \sin^3 2u - \frac{u}{2} + \frac{\sin 4u}{4}.$$

Pour déterminer A en fonction de x et de y, on observera que (γ) donne

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} u.$$

d'où $\sin u = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt[3]{2xy}}$, $\cos u = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{2xy}}$

$\sin 2u = 2\sin u \cos u = \sqrt[3]{2xy}$, $\qquad \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

$$= \frac{x^2 - y^2}{(\sqrt[3]{2xy})^2}$$

$$\sin 4u = 2\sin 2u \cos 2u = 2\frac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{2xy}}.$$

On a donc finalement

$$4A = 2xy - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + \frac{x^2-y^2}{2\sqrt[3]{2xy}}.$$

Cette quadrature se trouve bien plus facilement par l'emploi des coordonnées polaires ou par la géométrie infinitésimale : nous n'avons donné cet exemple qu'à titre d'exercice.

La lemniscate, le limaçon, la cissoïde, la strophoïde, etc., peuvent faire l'objet d'exercices analogues.

7. — Si on peut trouver une variable u dependant de x et de y, de telle manière qu'on ait, par exemple,

$$x^m = \mathrm{U}, \qquad xy = \Upsilon,$$

on aura

$$mx^{m-1}dx = \mathrm{U}'du;$$

d'où, en multipliant par x et divisant par $\mathrm{U} = x^m$,

$$mdx = \frac{x\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}du \quad \text{et} \quad ydx = \frac{\Upsilon\mathrm{U}'}{m\mathrm{U}}du.$$

Soit, par exemple, la courbe $x^m - x^2y^2 = 1$. On peut poser

$$\mathrm{U} = u^2 + 1, \qquad \Upsilon = u$$

ce qui donne

$$\mathrm{A} = \frac{1}{m}\int\frac{2udu}{u^2+1} = \frac{1}{m}\mathrm{L}(u^2+1) = \mathrm{L}\sqrt[m]{x^2+y^2+1}.$$

8. — Si l'équation peut se mettre sous la forme

$$x = \mathrm{U}, \qquad y = \frac{\Upsilon}{\mathrm{U}'} + \mathrm{X}.$$

on a

$$\mathrm{A} = \int\Upsilon du + \int\mathrm{X}dx.$$

Soit, par exemple, la courbe $(y-x)^3(x^2-1)^2 = x^3(\sqrt[3]{x^2-1}+1)^3$.

On peut écrire $\quad y = x\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+1}{(\sqrt{x^2-1})^2}$,

d'où, en posant

$$\mathrm{U} = x = \sqrt{u^3+1}, \qquad \Upsilon = \frac{3}{2}(u+1),$$

il viendra

$$ydx = \Upsilon du + xdx$$

$$\mathrm{A} = \frac{3}{2}\int(u+1)du + \int xdx = 3(\sqrt[3]{x^2-1}) + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2-1} + \frac{x^2}{2}.$$

9. — Le moyen le plus fécond est celui des substitutions. On peut, par exemple, substituer d'autres axes de coordonnées de manière à avoir une équation plus simple, en posant $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, ce qui donne une nouvelle équation en u et v dont on pourra tirer dv en fonction de u ou du en fonction de v. On aura la quadrature au moyen de l'une des intégrales

$$\int ydx = \int vdu + \beta u, \qquad \int xdy = \int udv + \alpha v.$$

Soit, par exemple, la courbe $y(y^2 - 3) = 2(u^2 + 1)$. Posons $y = u - 1$, nous aurons

$$u^3 - 3u^2 = 2x^2;$$

d'où

$$\int ydx = \int (u - 1)d\sqrt{\frac{u^3 - 2u^2}{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\int u\sqrt{u - 3}\, du$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{u - 3}}.$$

10. — La substitution $x = \dfrac{1}{u}$ a été appliquée par Fermat à la courbe

$$(\alpha) \qquad x^5y^2 - x + 1 = 0.$$

Cette substitution, traitée à la manière moderne, donne

$$y = u^2\sqrt{1 - u}, \qquad dx = -\frac{du}{u^2}$$

d'où

$$A = -\int \sqrt{1 - u}\, du = \frac{2}{3}(1 - u)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{x - 1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Il est facile de généraliser et de voir que cette substitution peut être appliquée aux courbes

$$(\alpha)\begin{cases} yx^{m+1} = (A + Bx + Cx^2 + \dots + Lx^m)\sqrt{a + bx + cx^2} \\ yx^{m-1}\sqrt{a + bx + cx^2} = A + Bx + Cx^2 + \dots Lx^m \end{cases}$$

en se rappelant que l'intégrale

$$\int X\sqrt{a + bx + cx^2}\, dx$$

est résoluble toutes les fois que le polynôme X est entier.

Au lieu des cas généraux (α), on pourra étudier les cas particuliers les plus simples, parmi lesquels il s'en trouve d'assez intéressants.

11. — Jean Bernoulli quarre le folium en posant $y = \dfrac{x^2}{u^2}$, ce qui donne $\qquad u^6 + x^3 = u^4,$

d'où, successivement,

$$3ydx = 3\frac{x^2}{u^2}dx = 4udu - 6u^3du$$

$$3A = 2u^2 - \frac{3}{2}u^4 = 2\frac{x^2}{y} - \frac{3}{2}\frac{x^4}{y^2} = \frac{x^2}{2y} + \frac{3}{2}xy,$$

expression qui revient à celle du n° 2, sauf quo le résultat s'applique ici à la partie supérieure de la boucle.

Il donne aussi la quadrature des deux courbes

$$x^2y^2 - x^9 = y^3 \quad \text{et} \quad y^4 - 6y^2 + 4y^2x^2 + 1 = 0.$$

au moyen des deux substitutions

$$y = \frac{x^2}{u} \quad \text{et} \quad y = u + \sqrt{u^2 + 1},$$

12. — La substitution $y = ux$ convient à la courbe

$$\alpha \frac{y^3}{x^2} + \beta \frac{x^2}{y} = 1.$$

On trouve en effet

$$x = \frac{u}{\alpha u^4 + \beta}$$

d'où
$$ydx = u^2 \frac{\beta - 3\alpha u^4}{(\alpha u^4 + \beta)^2} du,$$

ce qui donne à résoudre une intégrale de fraction rationnelle.

On pourrait aussi substituer $\frac{x}{u}$.

13. — On a une nouvelle quadrature du folium en posant $y = ux^2$: on trouve ainsi

$$x^3 = \frac{u - 1}{u^3},$$

d'où
$$3x^2dx = \frac{3du}{x^4} - \frac{2du}{u^3},$$

$$3ydx = 3ux^2dx = \frac{3du}{u^3} - \frac{2du}{u^2},$$

et en intégrant

$$3A = \frac{2}{u} - \frac{3}{2u^2} = \frac{2x^2}{y} - \frac{3x^4}{2y^2} = \frac{2x^2}{y} - \frac{3x}{2y^2}(xy - y^3) = \frac{3xy}{2} + \frac{x^2}{2y}.$$

Cette nouvelle quadrature, comme celle du n° 3, est due au marquis de l'Hospital.

Généralement, soit la courbe

$$\alpha x^m + \beta xy = x^{2m-pm+p}y^p,$$

on posera $y = ux^{m-1}$, ce qui donnera

$$x^m = \frac{\alpha + \beta u}{u^p}.$$

Différentiant et multipliant par $\frac{u}{m}$, il vient

$$dA = ydx = \frac{\beta u - p(\alpha + \beta u)}{u^p}.$$

14. — La substitution $y = ux$ présente une simplification spéciale, celle de ne demander que la recherche de la valeur de x^2 en u. Le secteur S ayant son sommet à l'origine, a en effet, pour différentielle

$$\frac{xdy - ydx}{2} = \frac{x^2}{2} d\frac{y}{x} = x^2 du.$$

Soit par exemple la courbe

$$\alpha \frac{y^{m+1}}{x^{m-1}} + \beta \frac{x^{m+1}}{y^{m-1}} = 1,$$

cette substitution donnera

$$x^2 = \frac{u^{m-1}}{\alpha u^{2m} + \beta},$$

d'où, à cause de (α),

$$S = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{2m\beta} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} u^m\right)}{\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} u^m\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \frac{1}{2m\beta} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \frac{y}{x}\right)$$

De même la courbe suivante, généralisation du folium,

$$\alpha \frac{x^m}{y^{m-1}} + \beta \frac{y^m}{x^{m-1}} = 1,$$

devient
$$x = \frac{u^{m-1}}{\alpha + \beta u^{2m-1}}.$$

L'expression de $dS = \frac{x^2}{2} du$ s'intégrera en posant

$$u^{2m-1} = \frac{\alpha}{\beta} v.$$

On a, en effet, $(2m - 1)u^{2m-2}du = \frac{\alpha}{\beta} dv,$

d'où
$$S = \frac{\alpha}{4m - 2} \int \frac{dv}{(1 + v)^2}.$$

Soit la courbe

$$\alpha \frac{y^m}{x^{m-1}} + \beta \frac{y^n}{x^{n-1}} + \gamma \frac{y^p}{x^{p-1}} + \ldots = \mu \left(\frac{y}{x}\right) + \nu \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \ldots$$

la substitution $y = ux$ donnera un résultat de la forme $x = \frac{U}{\Upsilon}$, d'où les deux solutions

$$dA = u \frac{U}{\Upsilon} d\left(\frac{U}{\Upsilon}\right), \qquad dS = \frac{U^2}{2\Upsilon^2} du,$$

Soit encore

$$(\alpha)\ \alpha\frac{y^{m+1}}{x^{m-1}}+\beta\frac{y^{n+1}}{x^{n-1}}+\gamma\frac{y^{p+1}}{x^{p-1}}+\ldots=\mu\left(\frac{y}{x}\right)+\nu\left(\frac{y}{x}\right)^{s}+\ldots$$

cette substitution donnera une équation de la forme

$$x^2\mathrm{U}=\Upsilon,$$

d'où

$$2\mathrm{S}=\int\frac{\Upsilon}{\mathrm{U}}du.$$

Le calcul de cette intégrale se simplifie notablement si le premier membre de (α) se réduit à son premier terme. Dans ce cas, on a

$$\mathrm{U}=\alpha u^{m+1}$$

d'où

$$2\mathrm{S}=\int\frac{\mu u^r+\nu u^s+\ldots}{\alpha u^{m+1}}du=\frac{\mu}{\alpha}\ \frac{u^{r-m}}{r-m}+\frac{\nu}{\alpha}\ \frac{u^{s-m}}{s-m}+\ldots$$

15. — Soit encore la courbe

$$(\beta)\quad \alpha y^{m+1}x^{km}+\beta y^{n+1}x^{kn}+\gamma y^{p+1}x^{kp}+\ldots=\mu y^r x^{kr}+\nu y^s x^{ks}+\ldots$$

Il est visible qu'en remplaçant y par ux^{-k} l'équation se réduira à une équation de la forme $x\mathrm{U}=\Upsilon$, d'où on tirera

$$x=\frac{\Upsilon}{\mathrm{U}},\qquad dx=\frac{\Upsilon'\mathrm{U}-\Upsilon\mathrm{U}'}{\mathrm{U}^2}du$$

et par suite

$$d\mathrm{A}=ux^{-k}dx=u\left(\frac{\mathrm{U}}{\Upsilon}\right)^k\frac{\Upsilon'\mathrm{U}-\Upsilon\mathrm{U}'}{\mathrm{U}^2}du=\mathrm{U}^{k-2}\frac{\Upsilon'\mathrm{U}-\Upsilon\mathrm{U}'}{\Upsilon^k}du.$$

Les calculs sont impraticables si l'équation (β) est compliquée et si k désigne un nombre un peu considérable; mais ils sont fort simples si le second membre se réduit à son premier terme, ou si $k=2$.

16. — Newton (*De quadratura curvarum*, Londres, 1704) s'est occupé de la recherche des courbes quarrables comprises sous la forme $\mathrm{A}y^{\alpha}x^{\beta}+\mathrm{B}y^{\gamma}x^{\delta}+\mathrm{C}x^{\epsilon}y^{\zeta}=0$. Cette question a été traitée plusieurs fois depuis. Nous donnerons le résumé de cette étude tirée du *Calcul intégral* de Bougainville (Paris, 1754).

On ramène facilement l'équation à la suivante

$$\mathrm{A}y^{\lambda}+\mathrm{B}y^{\mu}x^{\sigma}+\mathrm{C}x^{\tau}=0.$$

Posons $y=x^k u$, on aura

$$\mathrm{A}x^{k\lambda-\tau}u^{\lambda}+\mathrm{B}x^{k\mu+\sigma-\tau}u^{\mu}+\mathrm{C}=0,\qquad ydx=x^k u dx.$$

Il faut trouver x en fonction de u, ce qui se fera facilement dans les cas suivants

$$k\lambda - \tau = 0;$$
$$k\mu + \sigma - \tau = 0;$$
$$k\lambda - \tau = k\mu + \sigma - \tau;$$
$$k\lambda - \tau = 2(k\mu + \sigma - \tau);$$
$$k\lambda - \tau = \frac{1}{2}(k\mu + \sigma + \tau).$$

On est conduit à des différentielles binômes.

17. — Bougainville étudie la même chose pour l'équation à quatre termes, qu'on peut mettre sous la forme

$$Ay^{\lambda} + By^{\mu}x^{\sigma} + Cy^{\theta}x^{\rho} + Dx^{\tau} = 0;$$

d'où en changeant y en $x^k u$

$$Ay^{k\lambda - \tau}u^{\lambda} + Bx^{k\mu + \sigma - \tau}u^{\mu} + Cx^{k\theta + \rho - \tau}u^{\theta} + D = 0.$$

On peut tirer la valeur de x en fonction de u :

1° Si deux des exposants sont nuls : de là les trois solutions

$$k\lambda - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\mu + \sigma - \tau = 0,$$
$$k\lambda - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\theta + \rho - \tau = 0,$$
$$k\mu + \sigma - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\theta + \rho - \tau = 0;$$

2° Si l'un des exposants de x est nul et qu'un des deux autres soit double ou moitié du troisième. Par exemple

$$Au^{\lambda} + Bx^{2\beta}u^{\mu} + Cx^{\beta}u^{\theta} + D = 0.$$

De là les six solutions

$$k\lambda - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\mu + \sigma - \tau = 2\,(\theta k + \rho - \tau),$$
$$k\lambda - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\mu + \sigma - \tau = \frac{1}{2}(\theta k + \rho - \tau),$$
$$k\mu + \sigma - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = 2\,(\theta k + \rho - \tau),$$
$$k\mu + \sigma - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = \frac{1}{2}(\theta k + \rho - \tau),$$
$$\theta k + \rho - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = 2\,(k\mu + \sigma - \tau),$$
$$\theta k + \rho - \tau = 0 \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = \frac{1}{2}(k\mu + \sigma - \tau);$$

3° Si deux exposants de x dans les trois premiers termes sont les mêmes et en même temps doubles ou moitié. Par exemple

$$Ax^{2\beta} + Bx^{2\beta}u^{\mu} + Cx^{\beta}u^{\theta} + D = 0.$$

De là les six solutions

$$k\lambda - \tau = \mu k + \sigma - \tau \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = 2(\theta k + \rho - \tau),$$

$$k\lambda - \tau = k\mu + \sigma - \tau \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = \frac{1}{2}(\theta k + \rho - \tau),$$

$$k\lambda - \tau = \theta k + \rho - \tau \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = 2(k\mu + \sigma - \tau),$$

$$k\lambda - \tau = \theta k + \rho - \tau \quad \text{et} \quad k\lambda - \tau = \frac{1}{2}(k\mu + \sigma - \tau),$$

$$k\mu + \sigma - \tau = \theta k + \rho - \tau \quad \text{et} \quad k\mu + \sigma - \tau = 2(k\lambda - \tau),$$

$$k\mu + \sigma - \tau = \theta k + \rho - \tau \quad \text{et} \quad k\mu + \sigma - \tau = \frac{1}{2}(k\lambda - \tau).$$

(A suivre.)

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(Suite voir page 73).

---

26. — *D'un point* M, *du plan d'une parabole* P, *on abaisse les normales sur la parabole* P *et sa développée* D. *Montrer que :*

1° Si la somme des carrés des longueurs des normales abaissées de M sur D est constante, le point M parcourt une ellipse;

2° Si la somme des carrés des longueurs des normales abaissées de M sur D est égale à la somme des carrés des longueurs des normales abaissées de M sur P, le point M parcourt une hyperbole;

3° Si le double de la somme des carrés des normales abaissées de M sur D, augmenté du triple de la somme des carrés des longueurs des normales abaissés de M sur P, donne une somme constante, le point M parcourt une circonférence de cercle;

4° Si la somme des carrés des longueurs des droites joignant le point de rebroussement de la courbe D aux pieds des normales abaissées de M sur D est constante, le point M parcourt deux droites parallèles à l'axe de la parabole.

27. — *Par un point* P *pris dans le plan d'une parabole semi-cubique, on mène trois tangentes à la courbe, dont les points de contact sont* T_1, T_2, T_3, *et on abaisse quatre normales dont les pieds sont* N_1, N_2, N_3, N_4. *Montrer que :*

1° Le lieu des points P tels que le quadrilatère $PT_1T_2T_3$, soit inscriptible dans un cercle est une ligne droite;

2° Le cercle circonscrit au triangle $T_1T_2T_3$ rencontre la parabole semi-cubique en trois autres points T'_1, T'_2, T'_3. Les tangentes en ces trois derniers points concourent en un point Q. Quel que soit le point P, le milieu du segment PQ est sur une droite fixe;

3° L'hyperbole équilatère passant par les points N_1, N_2, N_3, N_4 rencontre la cubique en deux autres points N_5 et N_6. Quelle que soit la position du point P, la droite N_5N_6 enveloppe une hyperbole;

4° Quel que soit le point P, le centre des moyennes distances des quatre points N_1, N_2, N_3, N_4 se trouve sur une droite fixe;

5° On prolonge OP (O étant le point de rebroussement de la parabole semi-cubique) d'une longueur $PP' = PO$, et on prend le symétrique P'' du point P' par rapport à l'axe de la cubique. Ce point P'' est le centre de gravité du triangle $T_1T_2T_3$.

28. — *La podaire d'une parabole semi-cubique par rapport à son point de rebroussement est une quartique qui est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la parabole semi-cubique, le pôle de transformation étant au point de rebroussement.*

La parabole semi-cubique étant écrite sous forme unicursale

$$x = kt^2, \qquad y = kt^3,$$

la tangente au point de paramètre t a pour équation

$$(1) \qquad 3tX - 2Y = kt^3.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur cette tangente est

$$(2) \qquad 3tY + 2X = 0.$$

En éliminant t entre (1) et (2) on trouve

$$27Y^2(X^2 + Y^2) = 4kX^3,$$

ou en coordonnées polaires

$$(3) \qquad r = \frac{4k}{27} \cdot \frac{\cos^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

Or, l'équation polaire de la parabole semi-cubique est

$$(4) \qquad r = k \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}.$$

Les courbes (3) et (4) sont bien réciproques, le pôle de transformation étant au point de rebroussement de la parabole semi-cubique.

29. — *L'antipodaire de la cubique d'équation*

$$y^2 = \frac{2x^2(x - a)}{a - 2x}$$

par rapport à l'origine O est une parabole.

Cette cubique est unicursale. En posant $y = tx$, on trouve

$$x = \frac{a(t^2 + 2)}{2(t^2 + 1)}, \qquad y = \frac{at(t^2 + 2)}{2(t^2 + 1)}.$$

Telles sont les coordonnées d'un point A de la cubique. La perpendiculaire menée, par A, à OA, est

$$at^2 - 2Yt + 2(a - X) = 0.$$

L'enveloppe est donc la parabole ayant pour équation

$$Y^2 + 2a(X - a) = 0.$$

30. — *En chaque point* M *d'une parabole de foyer* F, *on mène la normale qui rencontre l'axe en* N. *Le lieu du centre de gravité des triangles* FMN *est une parabole.*

Si n est le coefficient angulaire de la normale MN, les coordonnées des trois points M, N et F sont

$$x_M = \frac{pn^2}{2}, \qquad y_M = -pn,$$

$$x_N = p + \frac{pn^2}{2}, \qquad y_N = 0,$$

$$x_F = \frac{p}{2}, \qquad y_F = 0.$$

On a, par conséquent, pour les coordonnées X, Y du centre de gravité du triangle FMN

$$3X = x_M + x_N + x_F = \frac{3p}{2} + pn^2,$$

$$3Y = y_M + y_N + y_F = -pn.$$

Le lieu est la parabole correspondant à l'équation

$$3Y^2 = p\left(X - \frac{p}{2}\right).$$

31. — *Du pôle* P *d'une normale à une parabole en* M, *on élève une perpendiculaire à la tangente* PM *jusqu'à sa rencontre en* Q *avec la perpendiculaire à l'axe menée par* M. *On projette le point* Q *sur la normale en un point qui est le centre de courbure de la parabole relatif au point* M.

Nous allons auparavant donner certaines formules qui permettront de résoudre la question 31 et quelques-unes des suivantes.

Soient N le second point de rencontre de la normale en M avec la parabole, et C le centre de courbure relatif au point M. Soient aussi C_1 le centre de courbure de la première développée relatif au point C, et C_2 le centre de courbure de la seconde développée relatif au point C_1.

Les coordonnées du point M en fonction du coefficient angulaire n de la normale en M, sont

$$x = \frac{pn^2}{2}, \qquad y = -pn.$$

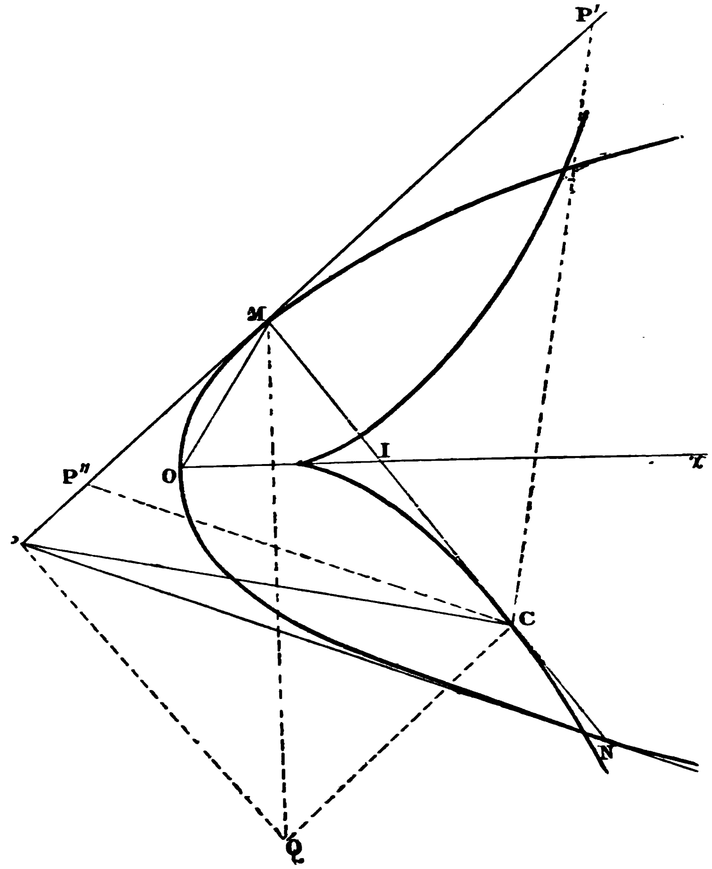
On trouve pour les coordonnées α et β de C

$$\alpha = p + \frac{3pn}{2}, \qquad \beta = pn^3.$$

On trouve de même pour les coordonnées $(\alpha_1\ \beta_1)$ de C_1 déduites de celles de C

$$\alpha_1 = p - \frac{3pn^2}{2} - 3pn^4, \qquad \beta_1 = 3pn + 4pn^3.$$

Si R désigne le rayon de courbure de la parabole en M, R_1 celui de la première développée en C et R_2 celui de la seconde développée en C_1,



on trouve pour la valeur de ces trois rayons de courbure en fonction de n

(1) $$R = p(1 + n^2)^{\frac{3}{2}};$$

(2) $$R_1 = 3pn(1 + n^2)^{\frac{3}{2}};$$

(3) $$R_2 = 3p(1 + 4n^2)(1 + n^2)^{\frac{3}{2}}.$$

D'où l'on déduit

(4) $$R_1 = 3nR;$$

(5) $$R_2 = 3R(1 + 4n^2).$$

L'élimination de n entre (4) et (5) conduit à la formule

(6) $$9R^2 + 4R_1^2 = 3RR_2.$$

Cette relation est appelée par M. Cesàro *équation caractéristique de la parabole*.

P étant le pôle de la corde MN, on trouve pour les coordonnées ξ et η de ce point

(7) $$\xi = -p - \frac{pn^2}{2}, \qquad \eta = \frac{p}{n},$$

et pour celles du point N (x_1, y_1)

(8) $$x_1 = \frac{p(n^2 + 2)^2}{2n^2}, \qquad y_1 = \frac{p(n^2 + 2)}{n}.$$

On en conclut très facilement les expressions des trois côtés MN, PM et PN du triangle PMN

(9) $$MN = \frac{2p}{n^2}(n^2 + 1)^{\frac{3}{2}};$$

(10) $$MP = \frac{p}{n}(1 + n^2)^{\frac{3}{2}};$$

(11) $$PN = \frac{p}{n^2}(1 + n^2)^{\frac{3}{2}}(n^2 + 4)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit ω l'angle $\widehat{NPM}$; on a

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{MN}{MP}$$

ou

(12) $$\operatorname{tg} \omega = \frac{2}{n}.$$

On trouve que $\overline{PC}^2 = R^2 + \overline{PM}^2$,

d'où l'on déduit

(13) $$PC = \frac{p}{n}(1 + n^2)^2$$

et $$\operatorname{tg} \widehat{MPC} = \frac{R}{MP}$$

ou

(14) $$\operatorname{tg} \widehat{MPC} = n.$$

On a encore $\operatorname{tg} \widehat{MNP} = \operatorname{cotg} \omega$

ou d'après (12)

(15) $$\operatorname{tg} \widehat{MNP} = \frac{n}{2}.$$

— Résolvons maintenant la question 31.

La question revient à montrer que $PQ = MC$. Or si

$$n = \operatorname{tg} \theta,$$

on a $$\operatorname{tg}(\theta - 90°) = \frac{MP}{PQ}.$$

D'où $$PQ = -MP \operatorname{tg} \theta = -n.MP,$$

où, d'après (10), $$PQ = -p(1 + n^2)^{\frac{3}{2}}$$

et à cause de (1) $$PQ = R = MC.$$

BIBLIOGRAPHIE

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par G. Papelier, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans, avec une préface de M. P. Appell, membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne; première partie, géométrie plane (Librairie Nony).

Il y a longtemps qu'on a fait l'observation, très évidente d'ailleurs, qu'il existe, non pas une géométrie analytique, mais une infinité. Après la géométrie cartésienne qui, pour de nombreuses raisons, tiendra toujours le premier rang, les plus connues * correspondent aux coordonnées tangentielles et aux coordonnées trilinéaires. On sait qu'elles ont été exposées avec de grands détails dans l'ouvrage de Painvin.

Notre jeune collègue, M. Papelier vient de publier une étude systématique des coordonnées tangentielles, en se proposant, par l'emploi exclusif de ce système, l'étude des coniques. Son livre est bien ordonné, les applications développées ou proposées sont nombreuses et intéressantes; il rendra certainement de grands services aux élèves studieux, à ceux, hélas ! toujours plus rares, qui ont la curiosité de lire et de voir au delà de ce qui leur est enseigné.

Il est bien difficile à un professeur de mathématiques spéciales, en face du programme qu'il a le devoir de développer dans son intégrité, de donner une place suffisante à l'enseignement des coordonnées tangentielles ou à celui des coordonnées trilatères. Mais ce qui n'est pas possible pour la masse des candidats, convient très bien à quelques-uns d'entre eux, à ceux qui, comprenant vite et retenant bien, peuvent consacrer, çà et là, un peu de temps à la lecture de quelque chose qui ne soit pas *le cours*. A ceux-là nous recommandons le livre de M. Papelier et nous leur garantissons qu'après l'avoir lu ils comprendront vraiment la géométrie analytique, considérée à son point de vue général. On peut ajouter que, par surcroît, ils se trouveront aussi mieux préparés à leurs examens; ayant ainsi tiré de cette lecture un bénéfice double.

Synopsis der hoeheren Mathematik. Von Joham G. Hagen, Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington. — Zweiter Band. — (Geometrie der Algebraischen Gebilde). — Berlin, Verlay von Felix Dames, 3, Koch-Strasse.

C'est le volume que nous avions annoncé, en rendant compte du premier volume de cette série (Voir le *Journal* 1892, p. 71).

* On trouvera dans l'ouvrage de l'abbé Aoust, relatif aux courbes planes, et dans beaucoup d'autres livres, les définitions et les applications de nombreuses représentations des courbes ou de surfaces par différents systèmes de coordonnées.

CONCOURS GÉNÉRAL

(Mathématiques spéciales, 21 mai 1894.)

On donne un triangle ABC dont les côtés ont respectivement pour équations

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Une conique S touchant en A et B les côtés CA, CB de l'angle ACB a pour équation :

$$XY = Z^2.$$

Sur cette conique S on prend le point μ, défini par les équations $X = Y = Z$ et un point variable M ; enfin, on désigne par ν le point où la droite $C\mu$ rencontre la corde des contacts AB.

Cela posé, on joint le point M à l'un des deux points m de la droite AB qui ont même polaire par rapport aux angles AMB, $\mu M\nu$.

1° Démontrer que, le point M décrivant la conique S, la droite Mm enveloppe une courbe Σ du 4e ordre et de la 3e classe, dont l'équation en coordonnées tangentielles est :

$$u^3 + v^3 = uvw.$$

2° Aux points où une droite D rencontre la courbe Σ on mène à cette courbe les tangentes $T_1\, T_2\, T_3\, T_4$, et on considère la conique inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite AB. — Démontrer que, si l'on assujettit la conique C_1 à passer par un point P, la droite D enveloppe une conique C_2.

3° Montrer que la conique C_2 se réduit à deux points f et f' quand le point P est sur une certaine conique C_3. Trouver dans ces conditions : 1° l'enveloppe Σ' de la droite ff' ; 2° le lieu des points f, f'.

EXERCICE ÉCRIT

79. — On donne une sphère S et une droite Δ, dont les équations, par rapport à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, sont :

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \text{et} \quad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Par le diamètre de la sphère qui coïncide avec Oz, on fait passer un plan quelconque, P, et l'on prend, relativement au cercle d'intersection de la sphère et du plan, la polaire du point où ce plan rencontre Δ.

1° Trouver l'équation et reconnaître la nature du lieu engendré par cette polaire, lorsque le plan P tourne autour de Oz.

2° Trouver les séries de plans réels qui coupent la surface Σ ainsi obtenue suivant des cercles, et vérifier que les plans d'une de ces séries sont perpendiculaires à la droite qui joint les points de contact des plans tangents menés à la sphère S par la droite Δ.

3° Faire voir que si l'on déplace la sphère S sans changer son rayon de manière à amener son centre en un nouveau point O_1 de l'axe Oz, il est possible de déterminer une nouvelle position Δ_1 de la droite Δ, telle que la nouvelle surface Σ_1, engendrée à l'aide de Δ_1 comme on l'a indiqué ci-dessus, coïncide avec Σ.

4° Trouver le lieu des positions de la droite Δ_1 quand le point O_1 centre de la sphère se déplace sur Oz.

(*École polytechnique*, concours de 1894.)

Notes sur l'exercice 78.

Prenons pour axes de coordonnées, dans le plan CAB, les droites CA, CB; soit M un point du plan. En désignant par x, y, z les coordonnées par rapport aux axes rectangulaires donnés; par X, Y les coordonnées relatives aux axes CA, CB; après avoir posé

$$OA = p, \quad OB = q, \quad OC = r,$$

on trouve facilement

$$x = \frac{pX}{\sqrt{p^2 + r^2}}, \quad y = \frac{qY}{\sqrt{q^2 + r^2}} \quad \text{et} \quad z = r\left[1 - \frac{X}{\sqrt{p^2 + r^2}} - \frac{Y}{\sqrt{q^2 + r^2}}\right].$$

En appliquant ces formules à l'exercice proposé, on trouve, pour représenter le lieu cherché, l'équation

$$b^2(y^2 + z^2)(c^2x^2 + a^2z^2) = a^2(x^2 + z^2)(c^2y^2 + b^2z^2), \quad \text{etc.}$$

QUESTION 351

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur général au lycée de Marseille.

On considère la famille des cubiques dont l'équation est

$$x^3 = ay^2.$$

D'un point du plan on mène les tangentes et les normales à ces cubiques :

1° Lorsque le paramètre a *varie, le lieu des points de contac des tangentes est une hyperbole équilatère, celui des pieds des normales est une ellipse;*

2° Le lieu des points d'où l'on peut mener à la cubique

$$x^3 = ay^2$$

quatre normales formant un faisceau harmonique est une parabole.

(E.-N. Barisien.)

1° Lieu des points de contact des tangentes. — Les points de contact des tangentes menées du point P (α, β) à la courbe

$$x^3 - ay^2 = 0$$

sont sur la polaire

$$3\alpha x^2 - 2a\beta y - ay^2 = 0.$$

Le lieu demandé s'obtient en éliminant le paramètre variable a entre ces deux équations.

On obtient :

$$xy + 2\beta x - 3\alpha y = 0,$$

hyperbole équilatère passant par l'origine et ayant pour asymptotes les droites

$$x - 3\alpha = 0, \qquad y + 2\beta = 0.$$

La tangente à l'origine a pour équation

$$2\beta x - 3\alpha y = 0.$$

Lieu des pieds des normales. — La normale en un point (x, y) de la courbe

(1) $$x^3 - ay^2 = 0$$

a pour équation

$$\frac{X - x}{3x^2} = \frac{Y - y}{-2ay}.$$

Exprimons que cette normale passe par le point P (α, β), on a :

(2) $$\frac{\alpha - x}{3x^2} = \frac{\beta - y}{-2ay}.$$

L'équation du lieu s'obtient en éliminant a entre les équations (1) et (2) ; on trouve :

$$3y(\beta - y) + 2x(\alpha - x) = 0,$$

ellipse passant par l'origine et par le point P; son centre a pour coordonnées $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ et ses axes ont pour équations

$$x = \frac{\alpha}{2} \qquad y = \frac{\beta}{2}.$$

2° L'équation aux coefficients angulaires des normales issues du point P (α, β) est :

(3) $$27\alpha m^4 - 27\beta m^3 - 12am^2 - 8a = 0.$$

Or, on sait que si l'équation

$$Am^4 + Bm^3 + Cm^2 + Dm + E = 0,$$

a ses quatre racines en proportion harmonique, on a

$$\begin{vmatrix} A & -\frac{B}{4} & \frac{C}{6} \\ -\frac{B}{4} & \frac{C}{6} & -\frac{D}{4} \\ \frac{C}{6} & -\frac{D}{4} & E \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation appliqué à l'équation (3) donne

$$\begin{vmatrix} 27\alpha & \frac{27\beta}{4} & -2a \\ \frac{27\beta}{4} & -2a & 6 \\ -2a & 0 & -8a \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée, devient :

$$27^2.\beta^2 + 32.27\alpha a + 16a^2 = 0,$$

ou
$$\beta^2 + \left(\frac{4}{27}\right)^2 a(54\alpha + a) = 0.$$

Le lieu du point P est donc une parabole ayant même axe que la cubique.

Nota. — Autre solution par M. Lebesgue, élève au lycée Louis-le-Grand.

QUESTION 367.

Solution par Mme Ve F. Prime.

On considère la courbe correspondant à l'équation

(Γ)
$$y = \frac{8a^4bx^2}{(x^2 + a^2)^3}$$

et l'ellipse représentée par l'équation

(E)
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

1° *L'aire de la courbe* (Γ), *comprise entre son périmètre et son asymptote réelle est équivalente à celle de l'ellipse* (E).

2° *L'aire de la courbe* (Γ), *telle que nous venons de la définir, est divisée en quatre parties équivalentes par les tangentes aux sommets du grand axe, et par le petit axe.*

On propose de montrer les deux résultats précédents sans effectuer d'intégration. (Barisien.)

La courbe Γ est symétrique par rapport à l'axe des y et est entièrement située au-dessus de l'axe des x auquel elle est asymptote. Elle passe par le point de coordonnées a, b; elle est tangente à l'axe des x à l'origine et son ordonnée présente des maxima égaux à $\frac{32}{27}b$, pour $x = \pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

1° Il faut démontrer que :

$$8a^4b\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{2b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Or en changeant x en ax, cette relation devient

$$4\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

et en posant $\varphi = \text{arc tg}\, x$ puis $\text{arc sin}\, x$ on a

$$4\int^\infty \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4},$$

et $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

2° La seconde partie revient à démontrer l'equivalence des intégrales

$$\int_0^a \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3}dx \quad \text{et} \quad \int_a^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^3}.$$

Il suffit de changer x en $\frac{a^2}{x}$ dans la première pour qu'elle devienne identique à la seconde.

Nota. — Solution analogue par M. Grolleau, répétiteur au lycée de Marseille.

QUESTIONS PROPOSÉES

394. — Étant donnée une parabole :

1° Trouver le lieu des points P tels qu'en abaissant les trois normales à la parabole, dont les pieds sont A B C et les seconds points de rencontre des normales avec la parabole sont A′ B′ C′, les normales en A′ B′ C′ concourent en un

même point P'. — Trouver aussi le lieu de P' et montrer que la droite PP' enveloppe une hyperbole.

2° Trouver le lieu des points P tels que les triangles ABC et A'B'C' aient leurs aires dans un rapport donné.

(E.-N. Barisien.)

395. — On considère une développée de parabole. Trouver le lieu des points M tels qu'en circonscrivant à la développée un angle dont les points de contact sont C et C', la droite joignant C' au second point de rencontre C'' de la tangente IC avec la développée soit elle-même tangente à la développée. *(E.-N. Barisien.)*

396. — D'un point A situé sur une parabole, on abaisse les perpendiculaires AP et AQ sur l'axe et la tangente au sommet. On mène, par A, une droite parallèle à la droite PQ qui rencontre la parabole en un second point B. Puis, on mène les normales à la parabole en A et B qui se rencontrent en M. Montrer que la normale MA est la normale double issue de M. *(E.-N. Barisien.)*

397. — En chaque point d'une parabole, outre la normale en ce point, on peut abaisser deux autres normales. La droite qui joint les pieds de ces dernières normales passe par un point fixe. *(E.-N. Barisien.)*

398. — Le lieu des foyers des paraboles tangentes en un point donné d'une droite donnée et ayant la corde normale en ce point de grandeur constante, est une cissoïde.

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11092-5-94.

THÉORÈMES SUR LA PARABOLE
ET SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Par M. **Balitrand**, ancien élève de l'École polytechnique.

Étant données la parabole P, dont l'équation est

$$y^2 - 2px = 0, \tag{1}$$

et l'hyperbole équilatère K, dont l'équation est

$$xy - K^2 = 0, \tag{2}$$

cherchons si l'on peut circonscrire, à la parabole P, un triangle inscrit dans l'hyperbole K.

Prenons sur l'hyperbole trois points A, B, C dont les coordonnées sont :

$$\left(K\lambda_1, \frac{K}{\lambda_1}\right), \qquad \left(K\lambda_2, \frac{K}{\lambda_2}\right), \qquad \left(K\lambda_3, \frac{K}{\lambda_3}\right).$$

Les équations des droites BC, CA, AB sont :

$$x + \lambda_2\lambda_3 y - K(\lambda_2 + \lambda_3) = 0,$$
$$x + \lambda_3\lambda_1 y - K(\lambda_3 + \lambda_1) = 0,$$
$$x + \lambda_1\lambda_2 y - K(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

J'exprime qu'elles sont tangentes à la parabole P et j'obtiens ainsi les relations :

$$p(\lambda_2\lambda_3)^2 + 2K(\lambda_2 + \lambda_3) = 0, \tag{3}$$
$$p(\lambda_3\lambda_1)^2 + 2K(\lambda_3 + \lambda_1) = 0, \tag{4}$$
$$p(\lambda_1\lambda_2)^2 + 2K(\lambda_1 + \lambda_2) = 0. \tag{5}$$

Si l'on donne λ_1, les relations (4) et (5) montrent que λ_2 et λ_3 sont les racines de l'équation

$$p(\lambda_1\lambda)^2 + 2K(\lambda_1 + \lambda) = 0.$$

Donc : $$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{2K}{p\lambda_1^2}, \qquad \lambda_2\lambda_3 = \frac{2K}{p\lambda_1},$$

et la relation (3) se trouve identiquement vérifiée par ces valeurs. Le problème est toujours possible. Pour construire un triangle tel que ABC, on prend arbitrairement sur l'hyperbole équilatère un point A, de ce point on mène deux tangentes à la parabole P ; ces tangentes coupent l'hyperbole en B et C, la droite BC est tangente à la parabole P.

Si l'on donne le point A, la droite BC a pour équation :

$$x + \frac{2Kx}{p\lambda_1} y + \frac{2K^2}{p\lambda_1^2} = 0;$$

la perpendiculaire abaissée de A sur BC :

$$y - \frac{2Kx}{p\lambda_1} - \frac{K}{\lambda_1} + \frac{2K^2}{p} = 0;$$

elle passe par le point H $\left(x = -\frac{p}{2}, \quad y = -\frac{2K^2}{p}\right)$ qui est fixe. Ceci est évident, car le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC doit se trouver sur l'hyperbole équilatère et sur la directrice de la parabole P, qui se coupent en un point unique à distance finie.

Soient A′, B′, C′ les points de contact des côtés du triangle ABC avec la parabole P. On vérifie aisément que les normales en ces points à la parabole concourent en un point M (*) ; et que l'ordonnée de ce point est égale à $-\frac{2K^2}{p}$ (**). Le lieu du point M est donc le diamètre qui passe par le point H.

Cela posé, on sait que le cercle circonscrit au triangle A′B′C′, appelé cercle de Joachimsthal, a pour équation

$$x^2 + y^2 - (p + x_0)x - \frac{y_0 y}{2} = 0. \tag{6}$$

Le cercle J, circonscrit au triangle ABC, a pour équation :

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{3p}{2} - x_0\right)x + y_0 y + \frac{p}{2}(p - x_0) = 0, \tag{7}$$

x_0, y_0 désignant les coordonnées du point M.

(*) Au moyen de la relation

$$\Sigma\mu_1\mu_2 = 0$$

qui existe entre les coefficients angulaires μ_1, μ_2, μ_3 de trois tangentes à la parabole telles que les normales aux points de contact concourent. En effet, l'équation générale des normales à la parabole est :

$$y - m(x - p) + \frac{pm^3}{2} = 0.$$

Il existe entre les racines de cette équation la relation

$$\Sigma m_1 = 0$$

et par suite entre μ_1, μ_2, μ_3 la relation

$$\Sigma\mu_1\mu_2 = 0.$$

(**) Au moyen des formules qui relient le pôle normal et le pôle tangentiel. (G. DE LONGCHAMPS, *Géométrie analytique*, page 483.)

L'équation du cercle de Joachimsthal peut s'écrire :

$$x^2 + y^2 - px - \frac{y_0 y}{2} - x_0 x = 0$$

et comme y_0 est constant, les cercles de Joachimsthal pour

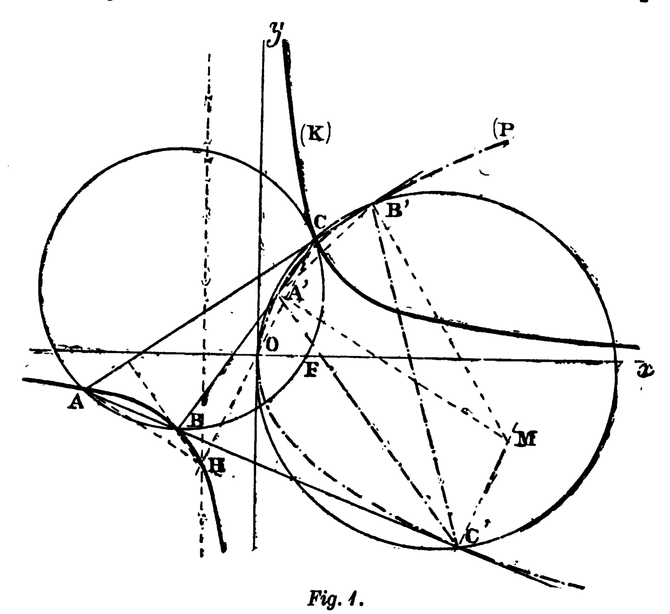


Fig. 1.

les différents triangles A' B' C' ont même axe radical, l'axe des y.

L'équation du cercle J peut s'écrire :

$$x^2 + y^2 - \frac{3p}{2}x + y_0 y + \frac{p^2}{2} + x_0\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0.$$

Ces cercles passent par deux points fixes qui sont : le foyer F de la parabole P, le symétrique du point H par rapport à l'origine O.

Considérons alors le cercle des neuf points du triangle ABC ; on sait que ce cercle est homothétique au cercle circonscrit au triangle A'B'C' ; le centre d'homothétie étant le point de rencontre des hauteurs, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

Par suite, les cercles des neuf points des différents triangles

ABC passent par le sommet O de la parabole P et par un second point fixe de la tangente au sommet. Le lieu de leurs centres est un diamètre de la parabole P.

Ce qui précède conduit aux théorèmes suivants (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1885, page 440).

Etant données la parabole P *dont l'équation est*

$$y^2 - 2px = 0,$$

et l'hyperbole équilatère K *dont l'équation est*

$$xy - K^2 = 0,$$

on peut inscrire dans l'hyperbole une infinité de triangles circonscrits à la parabole.

Les normales à la parabole aux points de contact des côtés du triangle ABC *concourent en un point* M, *dont le lieu est un diamètre de la parabole.*

Les triangles ABC *ont même centre des hauteurs.*

Les cercles circonscrits aux triangles ABC *ont pour axe radical commun la perpendiculaire à* Ox *menée par le foyer de la parabole. Les cercles circonscrits aux triangles* A'B'C' *ont pour axe radical commun l'axe* Oy.

Les cercles des neuf points des triangles ABC *passent par le sommet de la parabole. Le lieu de leurs centres est un diamètre de la parabole.*

Soient ω et ω' les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et A'B'C'. L'équation de la droite ωM est :

$$\frac{2(x - x_0)}{3(2x_0 - p)} = \frac{y - y_0}{3y_0};$$

elle passe par le foyer $F\left(x = \frac{p}{2}, y = 0\right)$. De plus, on a

$$\overline{\omega F}^2 = \left(\frac{p}{4} - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{y_0^2}{4},$$

$$\overline{FM}^2 = \left(\frac{p}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2,$$

c'est-à-dire

(1) $$FM = 2\omega F. \quad (*)$$

Soit M' le milieu de l'ordonnée du point M. L'équation

(*) Ce théorème a été donné par M. de Longchamps. Voir *Journal de Mathématiques spéciales*, 1891, page 120.

de la droite $\omega' M'$ est

$$\frac{x - x_0}{x_0 - p} = \frac{2y - y_0}{y_0};$$

elle passe par le point $F'(x = p,\ y = 0)$, symétrique du sommet O par rapport au foyer F. De plus, on a

$$\overline{\omega' F'}^2 = \left(\frac{p}{2} - \frac{x_0}{2}\right)^2 + \frac{y_0^2}{16}$$

$$\overline{F'M'}^2 = (p - x_0)^2 + \frac{y_0^2}{4},$$

c'est-à-dire

$$F'M' = 2\omega' F'.$$

Les côtés du triangle A'B'C' enveloppent la polaire réciproque de l'hyperbole K, par rapport à la parabole P. C'est une parabole P' ayant pour équation

$$x^2 + \frac{4K^2}{p} y = 0.$$

Le triangle A'B'C' est inscrit à la parabole P et circonscrit à la parabole P'. On a donc ce théorème :

Étant données deux paraboles P *et* P' *ayant même sommet* O *et se coupant orthogonalement en ce point, on peut inscrire à la parabole* P *un triangle circonscrit à* P'.

Soient A'', B'', C'' les points de contact des côtés du triangle A'B'C' avec la parabole P'.

Les côtés du triangle A''B''C'' ont pour enveloppe la polaire réciproque de P par rapport à P'.

C'est précisément l'hyperbole équilatère K dont l'équation est

$$xy - K^2 = 0.$$

Enfin, si l'on cherche la polaire réciproque de la parabole P' par rapport à l'hyperbole K, on retombe sur la parabole P. Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante :

Étant données l'hyperbole équilatère K *et les paraboles* P *et* P', *deux quelconques de ces coniques sont polaires réciproques par rapport à la troisieme.*

En partant du point $A\left(x = K\lambda_1,\ y = \frac{K}{\lambda_1}\right)$, nous avons obtenu la droite BC dont l'équation est :

$$x + \frac{2Ky}{p\lambda_1} + \frac{2K^2}{p\lambda_1^2} = 0.$$

Elle touche la parabole P au point $A'\left(x = \frac{2K}{p\lambda_1},\ y = -\frac{2K}{\lambda_1}\right)$.

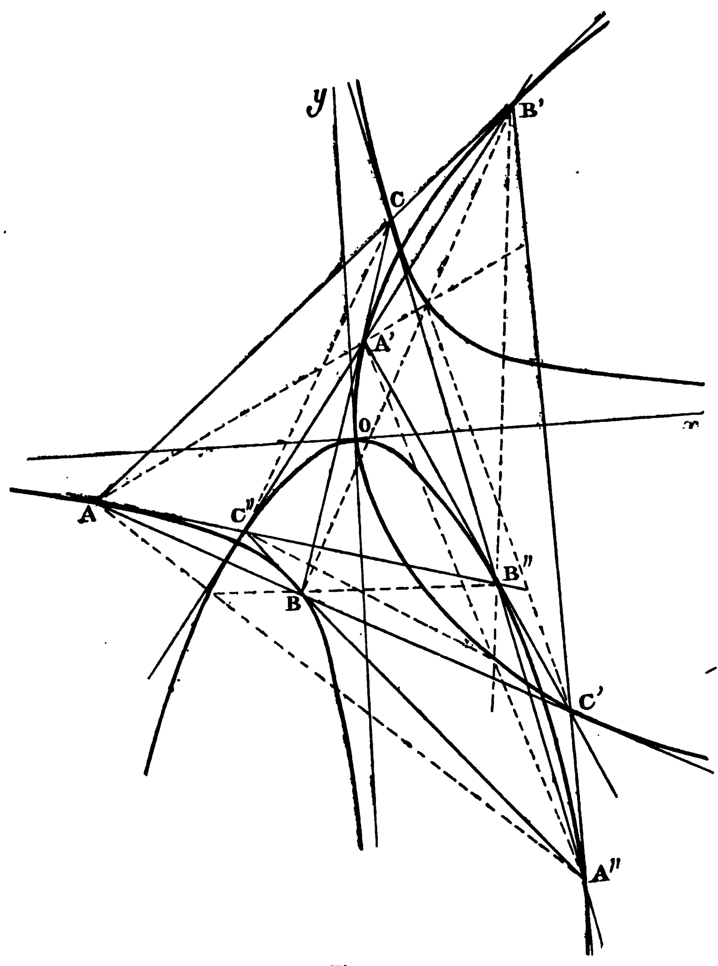


Fig. 2.

La droite B'C' a pour équation :

$$x - \frac{Ky}{p\lambda_1} + K\lambda_1 = 0.$$

Elle touche la parabole P' au point $A''(x = -2K\lambda_1$,

$y = -p\lambda_1^2$). La droite B″C″ a pour équation :

$$x + \lambda_1^2 y - 2K\lambda_1 = 0.$$

C'est précisément l'équation de la tangente à l'hyperbole K au point A.

Enfin, on peut vérifier que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un point situé sur l'hyperbole K; de même, les droites A′A″, B′B″, C′C″ concourent sur P; les droites A″A, B″B, C″C concourent sur P′.

II. — Nous allons chercher maintenant si l'on peut inscrire à l'hyperbole K un triangle autopolaire par rapport à la parabole P. Prenons toujours sur l'hyperbole équilatère trois points définis par les valeurs λ_1, λ_2, λ_3, du paramètre λ; de sorte que les équations des côtés du triangle ABC sont encore :

$$x + \lambda_2\lambda_3 y - K(\lambda_2 + \lambda_3) = 0,$$
$$x + \lambda_3\lambda_1 y - K(\lambda_3 + \lambda_1) = 0,$$
$$x + \lambda_1\lambda_2 y - K(\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

J'exprime que la polaire du point A coïncide avec le côté BC, ce qui donne les relations

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= -\frac{K}{p}. \end{aligned} \right.$$

Puisque les relations (8) sont symétriques, on retomberait évidemment sur ces mêmes relations en écrivant que les polaires des points B et C coïncident avec les côtés AC et AB. Les relations (8) peuvent être remplacées par les relations suivantes entre les coordonnées (x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3) des sommets du triangle ABC.

$$(9) \qquad \begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ & x_1x_2x_3 = -\frac{K^4}{p}; \\ & \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 0, \\ & y_1y_2y_3 = -\frac{K^2}{p}. \end{aligned}$$

La première exprime que le centre de gravité G du triangle

ABC se trouve sur l'axe Oy. Les autres peuvent aussi s'interpréter géométriquement.

Le produit des distances des trois sommets à l'axe Ox *ou à l'axe* Oy *est constant.*

La somme des inverses des distances des trois sommets à l'axe Ox *est nulle.*

Il est bien facile d'obtenir l'équation générale des cercles circonscrits aux triangles ABC. En effet, soit :

$$(10) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$$

l'équation du cercle circonscrit au triangle ABC. Les équations qui donnent les coordonnées des points d'intersection de ce cercle et de l'hyperbole équilatère sont :

$$(11) \qquad x^4 - 2\alpha x^3 + \gamma x^2 - 2\beta K^2 x + K^4 = 0;$$

$$(12) \qquad y^4 - 2\beta y^3 + \gamma y^2 - 2\alpha K^2 y + K^4 = 0.$$

Entre les racines de l'équation (11) existent les relations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\alpha;$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = K^4,$$

qui, au moyen des équations (9), donnent

$$x_4 = -p \qquad \alpha = -\frac{p}{2}.$$

Entre les racines de l'équation (12) existent les relations

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2\beta,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4 + y_3y_4 = \gamma,$$

$$y_1y_2y_3y_4 = K^4,$$

qui donnent encore

$$y_4 = -\frac{\text{[illegible]}}{p} \qquad 2\beta = -\frac{K^4 + p^2\gamma}{K^2 p}.$$

Le quatrième point d'intersection (x_4, y_4) du cercle ABC et de l'hyperbole est fixe, et le centre du cercle se trouve sur la directrice; par suite, le cercle passe par un second point fixe. D'ailleurs l'équation générale des cercles ABC pouvant s'écrire

$$(13) \qquad x^2 + y^2 + px + \frac{K^2}{p} y + \gamma\left(\frac{py}{K^2} + 1\right) = 0,$$

montre aussi que ces cercles ont même axe radical, et que le lieu de leurs centres est la directrice de la parabole P. C'est

un cas particulier du théorème suivant qui est bien connu, et qui correspond au théorème de Faure pour les coniques à centre :

Le centre du cercle circonscrit à tout triangle autopolaire par rapport à une parabole se trouve sur la directrice. (SALMON, *Sections coniques*, p. 584.)

L'équation (13) des cercles circonscrits aux triangles ABC peut se mettre sous une forme différente qui nous conduira à cette propriété remarquable :

Les triangles ABC *ont même centre des hauteurs.*

Fig. 3.

Posons

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3\lambda,$$

de telle sorte que les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC sont $(x = o,\ y = \lambda)$.

On a toujours $2\alpha = -p,$

puis $$2\beta = 3\lambda - \frac{K^2}{p} \qquad \gamma = -\frac{3\lambda K^2}{p},$$

de sorte que l'équation (13) devient :

$$x^2 + y^2 + px + \left(\frac{K^2}{p} - 3\lambda\right) y - \frac{3\lambda K^2}{p} = o.$$

Le centre des hauteurs est sur l'hyperbole équilatère; il est aussi sur la droite HG qui joint le centre du cercle circonscrit au centre de gravité, droite qui a pour équation

$$\frac{x}{p} = \frac{y - \lambda}{\frac{K^2}{p} - \lambda},$$

et qui coupe l'hyperbole au point fixe $\left(x = p,\ y = \frac{K^2}{p}\right)$.

Nous venons de voir que le cercle circonscrit au triangle ABC passe par deux points fixes $\left(x = -p,\ y = -\frac{K^2}{p}\right)$ $\left(x = 0,\ \ y = -\frac{K^2}{p}\right)$; par suite, le cercle des neuf points du triangle ABC, d'après une propriété citée au début, passe à la fois par le sommet et par le foyer de la parabole P. Les droites qui joignent les milieux des côtés du triangle ABC sont tangentes à la parabole P. En effet, on trouve pour leurs équations

$$p\lambda_1^2 x - K\lambda_1 y + \frac{K^2}{2} = 0,$$

$$p\lambda_2^2 x - K\lambda_2 y + \frac{K^2}{2} = 0,$$

$$p\lambda_3^2 x - K\lambda_3 y + \frac{K^2}{2} = 0.$$

Ce théorème élégant est bien connu. (Voir SERRET, *Géométrie de direction*, page 226 ; le théorème est attribué à Mention ; *Nouvelles annales*, 1867, page 443 ; 1888, page 430 ; *Journal de Mathématiques spéciales*, 1887, page 168.)

Enfin, on peut observer que les côtés du triangle ABC enveloppent la parabole P′, polaire réciproque de l'hyperbole K par rapport à la parabole P.

Puisque l'on peut inscrire à l'hyperbole K une infinité de triangles ABC autopolaires par rapport à la parabole P, on peut réciproquement circonscrire à la parabole une infinité de triangles conjugués par rapport à l'hyperbole K. C'est une propriété bien connue dont nous allons donner une démonstration directe pour le cas que nous étudions. Prenons trois tangentes à la parabole :

$$y - m_1 x - \frac{p}{2m_1} = 0 \quad y - m_2 x - \frac{p}{2m_2} = 0 \quad y - m_3 x - \frac{p}{2m_3} = 0,$$

qui se coupent en trois points A_1, B_1, C_1, dont les coordonnées sont :

$$x_1 = \frac{p}{2m_2 m_3} \qquad x_2 = \frac{p}{2m_3 m_1} \qquad x_3 = \frac{p}{2m_1 m_2},$$

$$y_1 = \frac{p}{2}\,\frac{(m_2 + m_3)}{m_2 m_3} \qquad y_2 = \frac{p(m_3 + m_1)}{2\, m_3 m_1} \qquad y_3 = \frac{p(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

J'exprime que la polaire du point A_1 par rapport à l'hyperbole K coïncide avec le côté B_1C_1, ce qui me donne les relations :

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0.$$

$$m_1m_2m_3 = \frac{p^2}{8K^2}.$$

On en déduit les relations suivantes, entre les ordonnées à l'origine des trois tangentes :

$$h_1h_2h_3 = K^2p,$$

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = 0.$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes à la parabole de coefficients angulaires m_1, m_2, m_3 est :

$$(14) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{px}{2\,m_1m_2m_3}(m_1 + m_2 + m_3 + m_1m_2m_3) \\ \quad - \dfrac{py}{2m_1m_2m_3}(m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2 - 1) \\ \quad + \dfrac{p^2}{4m_1m_2m_3}(m_1 + m_2 + m_3) = 0, \end{cases}$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$ sera donc :

$$(15) \quad x^2 + y^2 - \frac{px}{2} - \frac{4K^2y}{p}(m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2 - 1) = 0$$

Il passe par le sommet de la parabole P; par suite, il coupe cette courbe en trois autres points, tels que les normales en ces points sont concourantes. Comme il passe aussi par le foyer, on voit que les cercles $A_1B_1C_1$ ont pour axe radical commun l'axe de la parabole.

L'équation (15) peut se mettre sous une autre forme. En effet, les coordonnées du centre de gravité du triangle $A_1B_1C_1$ sont

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 0,$$

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{p}{3\,m_1m_2m_3}(m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3) = \lambda;$$

d'où
$$m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2 = \frac{3p\lambda}{8K^2}.$$

L'équation du cercle circonscrit devient

$$x^2 + y^2 - \frac{px}{2} - \frac{4K^2y}{p}\left(\frac{3p\lambda}{8K^2} - 1\right) = 0.$$

Les coordonnées de son centre sont

$$\left[\frac{p}{4}, \frac{2K^2}{p}\left(\frac{3p\lambda}{8K^2} - 1\right)\right].$$

Enfin, on peut observer que l'hyperbole K et la parabole P étant polaires réciproques par rapport à la parabole P′, les sommets du triangle $A_1B_1C_1$ sont sur la parabole P′. De même, si l'on désigne par A′, B′, C′ les points de contact des côtés du triangle $A_1B_1C_1$ avec la parabole P, les droites B′C′, C′A′, A′B′ sont tangentes à l'hyperbole K.

On peut résumer comme il suit les résultats qui précèdent:

Étant données l'hyperbole K *dont l'équation est*

$$xy - K^2 = 0,$$

et la parabole P *dont l'équation est*

$$y^2 - 2px = 0,$$

on peut inscrire dans l'hyperbole une infinité de triangles ABC *conjugués par rapport à la parabole; circonscrire à la parabole une infinité de triangles* $A_1B_1C_1$ *conjugués par rapport à l'hyperbole.*

Les centres de gravité des triangles ABC *se trouvent sur l'axe de la parabole.*

Les cercles circonscrits aux triangles ABC *ont même axe radical et le lieu de leurs centres est la directrice de la parabole* P.

Les cercles des neuf points des triangles ABC *passent par le sommet et par le foyer de la parabole* P *et les droites qui joignent les milieux des côtés du triangle* ABC *sont tangentes à la parabole.*

Le centre des hauteurs du triangle ABC *est un point fixe.*

Les côtés du triangle ABC *enveloppent la parabole* P′.

Le lieu du centre de gravité des triangles $A_1B_1C_1$ *est l'axe de la parabole.*

Les cercles circonscrits aux triangles $A_1B_1C_1$ *passent par le sommet et par le foyer de la parabole* P.

Les sommets A_1, B_1, C_1 *se trouvent sur la parabele* P′.

RECHERCHE DE COURBES PLANES

QUARRABLES OU RECTIFIABLES

sans autres transcendantes que les logarithmes et les arcs de cercle

Par M. **Aubry**.

(*Suite*, voir page 124).

II. — Courbes rectifiables.

17. — Nous allons donner d'abord un exemple assez général.

Soit la courbe $y = x^m$, où m désigne provisoirement un nombre quelconque.

On a $\quad y' = mx^{m-1}, \quad$ d'où $\quad ds = \sqrt{1 + m^2 x^{2m-2}}\, dx,$

différentielle binôme intégrable quand $\dfrac{1}{2m-2}$ est un nombre entier k positif ou négatif, ce qui a lieu quand m est de la forme $\dfrac{2k+1}{2k}$.

Soit k positif, l'intégrale prend la forme

$$\int (u^2 - 1)^{k-1} u^2 du.$$

Elle est résoluble en termes algébriques, puisque k est supposé positif. On peut donc obtenir la *rectification algébrique* ou *proprement dite* des courbes

$$y^2 = x^3, \quad y^4 = x^5, \quad y^6 = x^7, \quad y^8 = x^9, \ldots$$

correspondant aux valeurs $k = 1, 2, 3, 4$.

Par exemple, pour la première, appelée *parabole semi-cubique*, on a

$$dy = \frac{3}{2}\sqrt{x}\, dx \qquad \text{d'où} \qquad ds = \sqrt{\frac{9}{4}x + 1}\, dx$$

et par suite

$$s = \frac{4}{9}\int \left(\sqrt{\frac{9}{4}x + 1}\right) d\left(\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\,\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}x + 1\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}(9x + 4)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour la seconde, on a

$$dy = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}\, dx, \qquad 4ds = \sqrt{25\sqrt{x} + 16}\, dx.$$

Posons $25\sqrt{x} + 16 = u^2$, il viendra

$$x = \left(\frac{u^2 - 16}{25}\right)^2, \qquad \text{d'où} \qquad dx = \frac{4}{625}(u^2 - 16)udu;$$

et, par suite, $$ds = \frac{1}{625}u^2(u^2 - 16)du,$$

$$s = \frac{1}{625}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{16u^3}{3}\right) = \left(\sqrt{x} + \frac{16}{25}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x} - \frac{32}{75}\right).$$

Maintenant, soit k négatif. L'intégrale prend la forme $\int \frac{u^2du}{(u^2 - 1)^{k-1}}$ et par conséquent comprend des termes algébriques et des logarithmes. Faisant $k = -1, -2, -3, -4, \ldots$ on trouve les équations

$$y^2 = x, \quad y^4 = x^3, \quad y^6 = x^5, \quad \ldots$$

Le second cas d'intégrabilité des différentielles binômes donne lieu aux mêmes conclusions: la courbe $y = x^m$ n'est donc rectifiable que dans les deux cas que nous venons de traiter.

La parabole semi-cubique a été rectifiée à peu près en même temps (1659) par Neil, Van-Heuraet et Fermat. Le second ajoute que les paraboles $y^4 = x^5$, $y^6 = x^7$, ... sont également rectifiables, mais sans le démontrer.

Newton a traité analytiquement cette question. Il a retrouvé les découvertes de Neil et de Van-Heuraet et a ajouté, sans démonstration que les courbes $y^2 = x$, $y^3 = x^2$, ... sont rectifiables par logarithmes.

18. — La recherche de courbes rectifiables revient à trouver deux fonctions y et s de x, telles que $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

La première idée est d'essayer de rendre le second membre un carré parfait.

Cherchons par exemple à déterminer a et b de manière que la courbe $y^2 = ax^4 + bx^2$ soit rectifiable.

On a

$$y = x\sqrt{ax^2 + b},$$

d'où $$y' = \frac{2ax^2 + b}{\sqrt{ax^2 + b}}$$

—

et $$ds^2 = \frac{4a^2x^4 + (4b + a)x^2 + (b^2 + b)}{ax^2 + b} dx^2.$$

Le numérateur est un carré parfait si le carré du coefficient de x^2 est égal au quadruple produit des coefficients de x^4 et x^0, c'est à-dire si on a

$$(4ab + a)^2 = 16a^2(b^2 + b).$$

Or cette égalité entraîne la suivante $b = \frac{1}{8}$. La courbe cherchée a donc pour expression générale

$$8y^2 = 8ax^4 + x^2$$

a restant arbitraire, et elle se rectifie par la formule

$$ds = \frac{16\,ax^2 + 3}{\sqrt{8}\sqrt{8ax^2 + 1}} dx \; (*).$$

Soit maintenant la courbe

$$y = u^3 + au^2, \qquad x = u^2 + bu.$$

On a

$$x'_u = 3u^2 + 2au, \qquad y'_u = 2u + b,$$

d'où $$s'^2_u = 9u^4 + 12au^3 + (4a^2 + 4)u^2 + 4bu + b^2.$$

Identifions le second membre avec l'expression

$$9u^4 + \alpha^2u^2 + b^2 + 6\alpha u^3 + 6bu^2 + \alpha bu,$$

qui est le carré de $3u^2 + \alpha u + b$, on trouve

$$12a = 6\alpha, \qquad 4a^2 + 4 = \alpha^2 + 6b, \qquad 4b = 2\alpha b,$$

ce qui donne $\alpha = 2, \quad b = \frac{2}{3}, \quad a = 1.$

On a ainsi la courbe

$$y = u^3 + u^2, \qquad 3x = 3u^2 + 2u$$

qui se rectifie ainsi

$$s = \int\left(3u^2 + 2u + \frac{2}{3}\right)du = u^3 + u^2 + \frac{2}{3}u.$$

(*) Il peut se présenter quelquefois des simplifications. Ainsi soit $a = -\frac{1}{256}$, valeur qui correspond à la courbe $16y = x\sqrt{32 - x^2}$. Au lieu de suivre la méthode générale que nous venons de donner, il sera plus court de poser $y = \sin 2u = 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u}$, ce qui donnera

$$x = 4\sqrt{2}\sin u, \qquad dy^2 = 4\cos^2 2u du^2 = 4(\cos^2 u - \sin^2 u)^2 du^2$$
$$dx^2 = 32\cos^2 u du^2, \qquad ds^2 = 4(1 + 2\cos^2 u)^2 du^2$$

d'où $$s = 2\int(1 + \cos^2 u)\,du = 3u + \sin 2u = \frac{3}{2}\arc\sin y + y.$$

Soit encore la courbe

$$y = u^4 + au^2, \qquad x = u^3 + bu^2 + cu.$$

On trouve

$$s'^2 = 16u^6 + (16a + 9)u^4 + 12bu^3 + (6c + 4b^2 + 4a^2)u^2 + 4bcu + c^2.$$

Identifions avec le carré de $4u^3 + \alpha u + c$, il vient

$$\alpha = 2b, \quad 16a + 9 = 16b, \quad 2c = 3b, \quad 6c + 4b^2 + 4a^2 = \alpha^2 = 4b^2,$$

d'où on tire successivement

$$a = -\frac{9}{8}, \qquad b = -\frac{9}{16}, \qquad c = -\frac{27}{32}, \qquad \alpha = -\frac{9}{8}.$$

On a donc

$$8y = 8u^4 - 9u, \qquad 32x = 32u^3 - 18u^2 - 2Lu,$$

$$32s = \int (128u^3 - 36u - 27)du = 32u^4 - 18u^2 - 27u.$$

Soit encore la courbe $y = u^4 + au^3$, $x = u^3 + bu^2 + cu$, on aura

$$s'^2 = 16u^6 + 24au^5 + (9a^2 + 9)u^4 + 12bu^3 + (6c + 4b^2)u^2 + 4bcu + c^2.$$

Identifions avec le carré de $4u^3 + \alpha u^2 + \beta u + c$, on trouve successivement

$$\alpha = 3a, \quad \beta = \frac{9}{8}, \quad b = \frac{9}{16}, \quad c = 0, \quad a = 1, \quad \alpha = 3.$$

Ainsi la courbe

$$y = u^4 + u^3, \qquad 16x = 16u^3 + 9$$

se rectifie par la formule

$$s = \int (4u^3 + 3u^2 + \frac{9}{8}u)du = u^4 + u^3 + \frac{9}{4}u^2.$$

Si on applique le même calcul à la courbe

$$y = u^4 + au, \qquad x = u^3 + bu^2 + cu$$

on trouve des coefficients imaginaires.

19. — On peut aussi supposer que la partie sous le radical est le produit d'un polynôme entier par un carré parfait.

1° Soit la courbe

$$y^2 = x^3(ax + b)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = ax^{\frac{5}{2}} + bx^{\frac{3}{2}}$$

on a

$$y' = \frac{5}{2}ax^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}bx^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$1 + y'^2 = \frac{25}{4}a^2x^3 + \frac{15}{2}abx^2 + \frac{9}{4}b^2x + 1.$$

Identifions cette expression avec la suivante

$$\left(\frac{5}{2}ax + \alpha\right)^2\left(x + \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

ou

$$(\alpha) \qquad \frac{25}{4}a^2x^3 + \left(5\alpha a + \frac{25}{4}\frac{a^2}{\alpha^2}\right)x^2 + \left(\alpha + \frac{5}{4}a\right)x + 1,$$

il vient

$$\frac{9}{4}b^2 = \alpha^2 + \frac{5}{4}a, \qquad \frac{15}{2}ab = 5a\alpha + \frac{25}{4}\frac{a^2}{\alpha^2}.$$

Résolvant ces deux équations, on trouve les deux systèmes

$$b = 2\alpha, \quad a = \frac{8}{5}\alpha^3; \qquad \text{et} \qquad b = \frac{2}{3}\alpha, \quad a = 0.$$

Laissant de côté le second système (il donne la parabole semi-cubique, rectifiée plus haut) on a le nouveau groupe de courbes

$$25y^2 = 4\alpha^2x^3(4\alpha^2x + 5), \qquad (\alpha, \text{arbitraire})$$

lesquelles sont rectifiables. En effet, remplaçons a par sa valeur dans (α), il vient

$$ds = (4\alpha^3x + \alpha)\sqrt{x + \frac{1}{\alpha^2}}\,dx,$$

expression intégrable par décomposition.

2° Soit encore la courbe

$$y^2 = x^3(ax^2 + bx + c)^2 \qquad \text{ou} \qquad y = ax^{\frac{7}{2}} + bx^{\frac{5}{2}} + cx^{\frac{3}{2}}.$$

On aura $\quad y' = \frac{7}{2}ax^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2}bx^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}cx^{\frac{1}{2}}$

d'où

$$1 + y'^2 = \frac{49}{4}a^2x^5 + \frac{35}{2}abx^4 + \left(\frac{25}{4}b^2 + \frac{21}{2}ac\right)x^3 + \frac{15}{2}bcx^2 + \frac{9}{4}c^2x + 1,$$

expression qu'on assimilera à la suivante

$$(3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)\left(\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \frac{1}{8}\right)$$

en s'arrangeant de manière que le premier facteur soit un carré parfait. On a ainsi les égalités

$$4\beta^2 = 12\alpha\gamma \qquad \frac{25}{4}b^2 + \frac{21}{2}ac = 4\alpha\gamma + 2\beta^2$$

$$3\alpha^2 = \frac{49}{4}a^2 \qquad \frac{15}{2}bc = \frac{3\alpha}{\gamma} + 3\beta\gamma$$

$$\frac{25}{2}ab = 5\alpha\beta \qquad \frac{9}{4}c^2 = \gamma^2 + 2\frac{\beta}{\gamma}.$$

(A suivre.)

BIBLIOGRAPHIE

Corso di Analisi algebrica, con introduzione al calcolo infinitesimale, par E. Cesàro, professeur à l'Université royale de Naples (Turin, Fratelli Bocca, editeurs; prix 12 francs).

M. Cesàro, bien connu par ses nombreux et importants travaux mathématiques, publie, sous ce titre, le cours qu'il a professé de 1886 à 1891 à l'Université de Palerme. L'ouvrage correspond assez exactement à cette partie de l'analyse que nous enseignons, en France, dans les cours de mathématiques spéciales. Il débute par la théorie des déterminants; comprend, pour citer ses parties principales, l'étude des séries, des fonctions continues, la théorie des équations, et se termine par les différences et l'interpolation.

Parmi les théories qui sont exposées dans cet ouvrage et qui ne rentrent pas dans l'enseignement des mathématiques spéciales, on peut citer celles qui se rapportent aux nombres de Bernoulli et d'Euler, aux Quaternions et le théorème de Ruffini (*).

Cet ouvrage, bien ordonné, est plein d'intérêt; nous le recommandons tout particulièrement aux professeurs de mathématiques spéciales.

J'ai eu, en prenant connaissance du livre de M. Cesàro, la curiosité de rechercher quelle définition il donnait pour la continuité des fonctions. En France, on n'est pas, si je ne me trompe, tout à fait d'accord sur cette définition; elle n'est pas donnée de la même façon, même dans les cours de mathématiques élémentaires. C'est là un fait regrettable; car, au début des études mathématiques, plus que partout ailleurs, il importe que les définitions, tout au moins, soient uniformes et d'une parfaite clarté. Quoi qu'il en soit, je transcris ici, pour la soumettre aux lecteurs de ce journal, la définition de M. Cesàro.

« Une fonction est dite continue pour $x = a$, quand, à droite et à gauche de a, les limites de ses valeurs coïncident avec la valeur particulière que prend la fonction pour $x = a$. La continuité de $f(x)$, pour $x = a$, est donc exprimée par les deux égalités

$$f(a + o) = f(a), \qquad f(a - o) = f(a).$$

(*) Le théorème de Ruffini est celui qui établit l'*impossibilité de résoudre* ALGÉBRIQUEMENT *les équations de degré supérieur à 4*. En France, ce théorème est, je crois, habituellement appelé *Théorème de Galois*. A la page 637 du tome II de son *Algèbre supérieure*, M. Serret dit: « Je me propose d'exposer ici la théorie contenue dans le mémoire de Galois intitulé: *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.* » Ce mémoire a été publié pour la première fois en 1846, dans le tome XI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, quinze ans après la mort de l'illustre auteur. A la page 661, se trouve la démonstration de Galois, légèrement modifiée, Serret ayant substitué, à l'idée des *groupes de permutations* de Galois, celle des *systèmes de permutations*.

D'après une note placée au bas de la page 458 de l'ouvrage de M. Cesàro, c'est dans le mémoire imprimé à Modène, en 1813, sous le titre: *Riflessioni intorno alla soluz. delle equaz. alg. generali*, que Ruffini (précédant Galois, par conséquent) a fait connaître le théorème en question.

» La fonction sera continue *seulement à droite* ou *seulement à gauche*, quand une seule des égalités précédentes sera vérifiée.

» *La continuité a lieu dans un intervalle* quand elle existe pour toutes les valeurs considérées dans cet intervalle. »

M. Cesàro ajoute : « Il importe d'observer que la définition de la continuité est tout entière renfermée dans l'égalité

$$\lim f(x) = f(\lim x);$$

la possibilité de permuter le symbole *lim* avec le symbole f est donc caractéristique de la fonction continue ». (*Loc. cit.*, p. 194.)

Je ne me prononce pas, pour le moment du moins, sur cette définition de la continuité. J'ai voulu, en la citant, appeler l'attention des lecteurs, du *Journal* sur un point important et quelque peu controversé. Il est désirable, je crois, qu'un peu plus de lumière soit faite sur une définition qui, placée à la base de l'analyse, l'intéresse tout entière. Peut-être les réflexions, auxquelles je fais ici appel, mettront-elles un terme à cette diversité de langage, incontestablement regrettable, à laquelle j'ai fait tout à l'heure allusion. G. L.

Essai d'une théorie élémentaire des surfaces de 3e ordre par F. Dumont, professeur au lycée d'Annecy. (Annecy, imprimerie Joseph Dépollin.)

Dans cette brochure de 80 p. M. Dumont présente une étude, par la voie purement géométrique, des surfaces de 3e ordre. Ce travail débute par une démonstration très simple du théorème célèbre : *Il y a 27 droites sur la surface générale du 3e ordre.* L'étude de ces droites ; la génération linéaire, la génération ponctuelle des surfaces du 3e ordre ; l'étude des cônes et cylindres du 3e ordre sont successivement développées. Un dernier chapitre est consacré aux *Généralités* sur les pôles et polaires. Ce petit livre nous a paru constituer un résumé assez complet des théorèmes connus sur les surfaces du 3e ordre ; mais j'ignore, l'auteur s'étant posé la question à lui-même, quelle est la partie de son travail qui correspond à des faits nouveaux ; les connaissances que j'avais acquises sur ce point de la Géométrie, quand j'étudiais autrefois la surface de Steiner et sa réciproque, étant aujourd'hui, malheureusement avec beaucoup d'autres, bien effacées. G. L.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(Suite voir page 73).

32. — *Soient* MN *une corde normale à une parabole en* M, P *le pôle de cette corde*, C *le centre de courbure de la parabole en* M. *Le cercle passant par* P *et* C, *et ayant son centre sur la tangente* PM *coupe cette droite en un second point* P′. *La parallèle menée par* C *à* NP *rencontre* MP *en* P″. *Montrer que la longueur* MP′

est égale au tiers du rayon de courbure de la développée en C, *et que* MP *est égal au sixième du même rayon de courbure.*

La droite CP′ étant perpendiculaire à CP, on a

$$MP' = \frac{\overline{MC}^2}{MP} = \frac{R^2}{MP}.$$

Or, d'après les formules (1) et (10) de l'exercice 31, on a

$$MP' = pn(1 + n^2)^{\frac{3}{2}},$$

et, d'après (2),
$$MP' = \frac{R_1}{3}.$$

— On a aussi $MP'' = MC.\cotg \omega = p(1 + n^2)^{\frac{3}{2}} \frac{n}{2}$,

ou
$$MP'' = \frac{R_1}{6}.$$

Ces deux propriétés permettent de construire le rayon de la première développée en C.

— On a encore $P'P'' = MP' + MP'' = \frac{R_1}{2}.$

— On peut encore construire le rayon R_1 d'après l'expression (4), ou $R_1 = 3R \operatorname{tg} \theta$.

33. — *1° L'angle sous lequel on voit une corde normale à une parabole, du pôle de cette corde, est égal à l'angle sous lequel on voit du sommet de la parabole le segment de cette même corde normale, compris entre le point de contact et l'axe.*

2° L'angle sous lequel on voit les deux extrémités d'un rayon de courbure à la parabole, du pôle de ce rayon de courbure, est égal à l'angle que fait ce rayon de courbure avec l'axe de la parabole.

Ces deux propriétés sont mises immédiatement en évidence par les formules de l'exercice 31.

1° En employant la même notation que dans cet exercice, on a, en désignant par O le sommet de la parabole et par I le point de rencontre de la normale en M avec l'axe,

$$\operatorname{tg}\widehat{MOI} = \frac{y}{x} = \frac{-pn}{\frac{pn^2}{2}} = -\frac{2}{n};$$

d'où, d'après (12),
$$\widehat{MOI} = \omega.$$

2°. — L'expression (14) donne

$$\operatorname{tg}\widehat{MPC} = n.$$

et, par suite,
$$\widehat{MPC} = \widehat{MIO}.$$

34. — *Trouver la normale à la parabole pour laquelle la distance du centre de courbure situé sur cette normale au pôle de la normale est minima.*

La formule (13) de l'exercice 31 donne

$$PC = \frac{p}{n}(1+n^2)^2.$$

En annulant la dérivée de PC par rapport à n, on trouve

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Les coordonnées de M, pied de la normale, sont

$$x = \frac{p}{6}, \qquad y = -\frac{p}{\sqrt{3}}.$$

35. — *Trouver la normale à la parabole pour laquelle la distance du pied de la normale à son pôle est minima.*

La formule (10) de l'exercice 31 donne

$$MP = \frac{p}{n}(1+n^2)^{\frac{3}{2}}.$$

En prenant la dérivée de cette expression, par rapport à n, et en l'égalant à zéro, on trouve

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les coordonnées de M sont,

$$x = \frac{p}{4}, \qquad y = -\frac{p}{\sqrt{2}}.$$

36. — *Trouver la normale à la parabole pour laquelle la distance de son pôle au second point de rencontre de la parabole et de la normale est minima.*

La formule (11) de l'exercice 31 donne encore

$$PN = \frac{p}{n^2}(1+n^2)^{\frac{3}{2}}(n^2+4)^{\frac{1}{2}}.$$

En annulant la dérivée de PN par rapport à n, on trouve

$$2n^4 + 3n^2 - 8 = 0.$$

D'où

$$n = \sqrt{\frac{\sqrt{73} - 3}{4}}.$$

EXERCICE ÉCRIT

80. — On donne trois axes rectangulaires ; dans le plan zOx, un cercle Δ touchant Ox au point O ; dans le plan zOy, un centre Δ' tangent en O à Oy. Par un point M mobile sur Oz, on mène à Δ une tangente qui coupe Ox en A ; puis, à Δ', une tangente coupant Oy en B.

On demande l'enveloppe de AB.

Notes sur l'exercice 79.

(Concours de l'école polytechnique en 1894.)

Nous résumons rapidement la solution de cet exercice, très facile.

La droite Δ, considérée dans cet énoncé, coupe le plan désigné par P, en un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tel que

$$x_0 = \frac{bp - aq}{b - \lambda a}, \qquad y_0 = \frac{\lambda(bp - aq)}{b - \lambda a}, \qquad z_0 = \frac{\lambda p - q}{b - \lambda a}.$$

En posant $bp - aq = K$, le plan polaire de M_0 est représenté par

$$K(x - \lambda y) + z(\lambda p - q) = R^2(b - \lambda a).$$

La polaire de M_0 est représentée par cette équation et par $y = \lambda x$, En éliminant λ, on a

$$\text{(A)} \qquad K(x^2 + y^2) - qzx + pzy + R^2(ay - bx) = 0.$$

Cette équation est de la forme

$$f(x, y) + zP = 0,$$

$P = 0$ représentant une droite du plan des xy. Cette droite passe par l'origine, ainsi que la conique $f = 0$. Elle coupe donc cette conique en deux points réels; ces points sont d'ailleurs distincts, sauf dans le cas où l'on suppose la droite tangente à la conique, ce qui a lieu quand on a

$$K = pb - aq = 0.$$

Le lieu est donc un *hyperboloide à une nappe*, en général; et, dans le cas particulier signalé, celui qui correspond à $K = 0$, *un système de deux plans.*

$$ay - bx = 0, \qquad R^2 + z\frac{p}{a} = 0.$$

L'hypothèse $K = 0$ correspond d'ailleurs au cas où Δ rencontre Oz.

Dans le cas général, $K \neq 0$, le lieu est un hyperboloïde à une nappe qui se réduit à un cône ou à un cylindre. On trouve *un cône*, quand Δ est parallèle au plan de yOx; *un cylindre,* quand Δ est dans le plan yOx.

2° Une série de plans cycliques est en évidence; elle est constituée par les plans parallèles à yOx.

En écrivant l'équation sous la forme

$$K(x^2 + y^2 + z^2) - z(qx - py + Kz) + \ldots = 0,$$

on voit que la seconde série de plans cycliques est constituée par les plans parallèles au plan qui correspond à l'équation

$$\text{(1)} \qquad qx - py + Kz = 0.$$

Pour avoir la droite Δ', conjuguée de Δ, il faut prendre les plans polaires de deux points quelconques, pris sur Δ; par exemple les points

$$p, q, 0; \qquad a + p, \qquad b + q, \qquad 1,$$

on trouve ainsi, pour représenter Δ', les équations

$$px + qy - R^2 = 0, \qquad (a + p)x + (b + q)y + z = R^2.$$

Cette droite est parallèle à celle qui correspond aux équations

$$\frac{x}{q} = \frac{y}{-p} = \frac{z}{K},$$

droite perpendiculaire au plan (1).

3° Posons $OO_1 = h$ et transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point O_1.

Les équations d'une droite étant prises sous la forme

$$X = a_1 Z + p_1, \qquad y = b_1 Z + q_1,$$

la quadrique correspondant à cette droite sera

$$K_1(X^2 + Y^2) - q_1 ZX + p_1 YZ + R^2(a_1 Y - b_1 X) = 0.$$

En revenant aux anciens axes, cette quadrique sera représenté par

$$(A') \qquad (x^2 + y^2)(b_1 p_1 - a_1 q_1) - q_1 x(z - h) + p_1 y(z - h) + R^2(a_1 y - b_1 x) = 0.$$

En identifiant (A), (A′) on a d'abord

$$\frac{p_1}{p} = \frac{q_1}{q} = \rho.$$

L'équation (A′) devient donc

$$(x^2 + y^2)(b_1 p - a_1 q) - qzx + pyz + qhx - phy + \frac{R^2}{\rho}(a_1 y - b_1 x) = 0.$$

L'identification en question donne alors

$$bp - aq = b_1 p - a_1 q,$$

$$aR^2 = \frac{a_1 R^2}{\rho} - ph,$$

$$-bR^2 = qh - \frac{b_1 R^2}{\rho};$$

équations dans lesquelles a_1, b_1, ρ sont les inconnues. En multipliant : la deuxième par q; la troisième, par p; puis, ajoutant, on trouve $\rho = 1$.

On a donc $\quad p_1 = p, \qquad q_1 = q;$

$$a_1 = a + \frac{ph}{R^2}, \qquad b_1 = b + \frac{qh}{R^2}.$$

4° Les équations de Δ_1, *dans le système* xyz, sont

$$x = (z - h)\left(a + \frac{ph}{R^2}\right) + p,$$

$$y = (z - h)\left(b + \frac{qh}{R^2}\right) + q.$$

Il reste à éliminer h entre ces deux équations. En les multipliant, respectivement, par q et $-p$, et ajoutant ces produits, on trouve,

$$(2) \qquad qx - py + k(z - h) = 0.$$

On a d'ailleurs, par une combinaison naturelle,

$$(3) \qquad \frac{x - p}{y - q} = \frac{a + \dfrac{ph}{R^2}}{b + \dfrac{qh}{R^2}}.$$

Éliminant h entre (2) et (3), on trouve

$$(py - qx)(py - qx - kz) + R^2k(bx - ay - k).$$

Cette équation, de la forme $PQ + V = 0$, représente un paraboloïde, etc.

Remarque. — Ce problème se rattache immédiatement, pour les deux premières parties, à la génération classique d'un *hyperboloïde engendré par les droites communes à deux plans rectangulaires, plans passant par deux droites fixes.*

La droite Δ' est en effet à l'intersection de deux plans passant : l'un

par oz; l'autre, par la conjuguée de Δ'. Ces plans sont d'ailleurs rectangulaires, pour des raisons évidentes. On sait que les plans cycliques, des hyperboloïdes ainsi engendrés, sont perpendiculaires aux droites fixes. On retrouve ainsi, par l'application de propriétés connues, les deux premières parties du problème posé (*).

ÉCOLE NORMALE

(Concours de 1894).

On considère les coniques représentées par l'équation

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a - b)y = 0,$$

où a et b sont deux constantes et λ un paramètre variable.

1° Prouver que, si λ varie, les polaires d'un point fixe M, par rapport à ces coniques passent par un point fixe P, dont on calculera les coordonnées au moyen des coordonnées du point M.

2° On fait décrire au point M une droite arbitraire Δ

$$ux + vy + w = 0,$$

prouver que le point P décrit alors une conique S et que, lorsque Δ se déplace dans le plan, la conique S se déforme en passant par trois points fixes A, A', A''. Inversement, quand le point P décrit la conique S, le point M décrit la droite Δ; que devient-il quand le point P vient en l'un des trois points A, A', A''?

3° Où doit être pris le point M pour que le point P soit rejeté à l'infini? Quelle position doit avoir la droite Δ pour que la conique S qui lui correspond soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole?

4° On considère toutes les coniques S qui sont des paraboles et, en particulier, les axes de ces courbes. Prouver que par tout point du plan, il passe trois de ces axes; distinguer les points du plan pour lesquels ces trois axes sont réels et ceux pour lesquels un seul axe est réel.

5° Trouver le lieu des points pour lesquels deux de ces axes se coupent à angle droit.

(*) On trouvera, dans les feuilles publiées par la librairie Croville-Morant, une démonstration géométrique complète et une généralisation de la question.

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 12396-6-94.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE
DE TRANSFORMATION

Par M. **G. Leinekugel**, élève-ingénieur hydrographe.

La méthode que nous désirons exposer conduit à quelques propriétés remarquables des courbes d'ordre m et à d'autres relatives à des courbes, admettant trois points multiples dont l'ordre de multiplicité est égal à la moitié de l'ordre de la courbe considérée. Dans cette méthode de transformation, à un point de la première figure correspond dans la seconde une conique passant par trois points donnés, et à une droite, un point. Nous montrerons quelle est la transformée d'une courbe d'ordre m, et comment le tracé de la tangente à cette courbe s'opère simplement.

1. Voici certaines propriétés qui nous serviront dans la suite :

(a) *Dans le plan d'un triangle* ABC *pivote autour d'un quatrième point* D *une droite* Δ *qui rencontre les côtés* AB, AC *en* c, b. *Les droites* Bb, Cc *se coupent en un point* d *qui décrit une conique* (D) *circonscrite au triangle* ABC *(fig. 1).*

Les rayons Cc, Bb, sont évidemment deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques de sommets B, C. Le point d de rencontre de ces droites décrit la conique (D) passant par les sommets A, B, C du triangle. Elle admet en d comme tangente la conjuguée harmonique de Dd par rapport à Bb, Cc. Il résulte de là que DC, DB sont les tangentes en B, C et en A ; c'est la conjuguée harmonique de DA par rapport aux droites AB, AC.

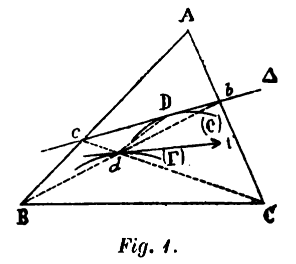


Fig. 1.

Cette conique (D), est celle qui correspond au point D dans notre transformation. Ainsi, à chaque point du plan de la première figure correspond une conique bien déterminée.

Cette conique (D), est susceptible de plusieurs autres modes de génération.

On peut la considérer comme :

1° *Le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point* D *aux coniques* (S) *passant par deux sommets* B, C *d'un triangle* ABC *et rencontrant les deux côtés* AB, AC *en deux points situés en ligne droite avec* D.

2° *Le lieu des points doubles de l'involution déterminée sur une droite* Δ *pivotant autour d'un point* D, *dans le plan d'un triangle* ABC; *par les deux couples de points* D, a'; b' c'.

Les points a', b', c' sont les points de rencontre de Δ avec les côtés BC, CA, AC.

Ce mode de génération de la conique (D) permet de construire ses directions asymptotiques puisqu'il suffit de tracer les droites Δ telles que les milieux des segments Da', $b'c'$ coïncident. Ces droites passeront par les deux points communs à la droite et à la conique, lieux des milieux de ces segments.

Remarque. — Toute conique circonscrite à un triangle ABC peut être regardée comme une des coniques (D). Il suffit pour déterminer le point D, auquel elle correspond, de mener les tangentes en B, C à cette conique; ces droites se coupent au point cherché.

(b) *Si le point* d *décrit une droite* Δ, *les coniques* (D) *correspondantes passent toutes par un quatrième point* d.

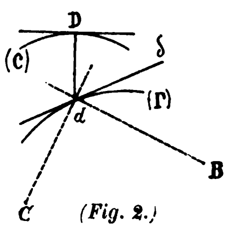
Cette propriété résulte du premier mode de génération des coniques (D) qui dans ce cas passeront toutes par le point d correspondant à la droite Δ.

COURBE TRANSFORMÉE D'UNE COURBE QUELCONQUE

Si un point D du plan d'un triangle ABC décrit une courbe (C) de degré m et de classe c, aux différents points de (C) correspondront autant de coniques (D). L'enveloppe de ces coniques est la courbe (Γ) transformée de (C) (*fig.* 2).

Nous nous proposons de construire cette courbe (Γ) par points et par tangentes, d'en indiquer le degré et la classe dans le cas général où la courbe (C) ne présente aucune particularité remarquable.

Au point D de la courbe (C) correspond une conique (D), définie comme il a été dit plus haut, à la tangente Δ à (C) en ce point D correspond un point d, qui appartient à (D) et qui est le point de contact de cette conique avec son enveloppe (Γ).



(Fig. 2.)

Considérons, en effet, une sécante Δ' infiniment voisine de Δ et passant par D, au point de rencontre D' avec (C), infiniment voisin de D, correspond une conique (D'), circonscrite à ABC et qui a comme quatrième point commun avec (D) le point d' qui est le correspondant de la droite Δ'. Quand la droite Δ' se rapproche indéfiniment de Δ, le point commun d' aux deux enveloppées (D), (D') vient se confondre avec d. Ce point est donc celui où (D) touche son enveloppe (Γ). La tangente en ce point à l'enveloppe et à l'enveloppée étant commune; il résulte de là que c'est la conjuguée harmonique dt de dD par rapport aux droites db, dc.

Le mode de génération de (Γ) revient à prendre le lieu des points d qui correspondent aux tangentes de (C).

Si la tangente Δ passe par un des sommets A, B, C du triangle on voit que le point d qui y correspond coïncide avec ce sommet. On déduit de là que chacun des sommets du triangle est pour la transformée (Γ) un point multiple d'ordre égal à la classe c de (C). De plus, les tangentes en B, C à (Γ) sont les c tangentes que l'on peut mener de ces points à (C); pour le point A ce sont les droites conjuguées harmoniques par rapport aux côtés AB, AC des c tangentes que l'on peut mener, de ce point, à (C).

Degré de la transformée. — Il résulte, de ce mode même de génération de (Γ), que si la courbe (C) n'est pas tangente à BC, il n'y a pas de points de (Γ) en dehors de B, C sur cette droite; de là, nous déduisons que le degré de (Γ) est égal à $2c$. Dans le cas où BC est tangente en t points à (C), le degré s'abaisse à $2(c - t)$.

Remarque I. — Au point de rencontre D de deux courbes

(C), (C′) correspond une conique (D) tangente à (Γ) (Γ′) transformées des courbes (C), (C′), aux points d, d' qui correspondent aux droites Δ, Δ′, tangentes à (C), (C′) au point D.

Remarque II. — A la tangente commune Δ à deux courbes (C), (C′) correspond un point d qui est commun aux deux transformées (Γ), (Γ′); et, aux deux points de contact avec (C), (C′) de Δ, correspondent les deux coniques (D), (D′) tangentes à (Γ), (Γ′) au point d.

Remarque III. — A tout point D d'ordre n de (C) correspond une conique (D) tangente en n points à sa transformée (Γ) et inversement.

A toute tangente Δ touchant (C) en n points correspond un point d d'ordre de multiplicité n pour sa transformée (Γ).

II

Des considérations qui précèdent, on déduit quelques propriétés remarquables relatives aux courbes (Γ) d'ordre $2m(m-1)$ possédant trois points multiples d'ordre $c=m(m-1)$. Elles résultent immédiatement des propriétés tout à fait élémentaires des courbes (C) d'ordre m et de classe $c=m(m-1)$.

1° Une courbe (C) est déterminée quand on en donne $\frac{m(m+3)}{2}$ points.

Théorème I. — *Une courbe* (Γ) *est complètement déterminée quand on l'assujettit à être tangente à* $\frac{m(m+3)}{2}$ *coniques* (D) *circonscrites au triangle* ABC *formé par ses trois points multiples.*

Comme nous l'avons fait remarquer, on passe de chaque conique (D) au point D et on a ainsi $\frac{m(m+3)}{2}$ points qui déterminent (C); il en résulte que (Γ) l'est également.

2° Une courbe (C) de classe c est déterminée quand on donne $A=\frac{c(c+3)}{2}$ tangentes.

Théorème II. — *Une courbe* (Γ) *est complètement déterminée quand on en donne* A *points.*

Il suffit de remarquer qu'à chaque tangente de (C) correspond dans la transformation un point de (Γ).

3° Une droite quelconque Δ du plan rencontre la courbe (C) en m points, en général.

Théorème III. — *Si l'on considère une courbe* (Γ) *par un point* d *de son plan on peut mener* m *coniques* (D) *circonscrites au triangle* ABC *passant par ce point* d *et tangentes à* (Γ).

En effet, à la droite Δ qui rencontre (C) en m points D correspond dans la transformation un point d et, à chacun des points D, correspondent autant de coniques (D) tangentes à (Γ) et passant par le point d.

Toutes ces coniques (D) dont nous parlons sont circonscrites au triangle ABC, évidemment.

Le théorème corrélatif du précédent est le suivant :

Si on considère une courbe (Γ′) *de classe* $2m(m-1)$ *et qui possède dans son plan trois droites la touchant en* $m(m-1)$ *points chacune, on peut mener* m *coniques inscrites dans le triangle formé par ces trois droites, tangentes à la courbe* (Γ′) *et, de plus, tangentes à une droite donnée.*

Il est aussi facile d'énoncer les théorèmes corrélatifs des deux premiers.

4° D'un point D, du plan, on peut mener c tangentes à (C). On en déduit pour la courbe (Γ) qu'une conique D circonscrite au triangle ABC la rencontre en c points en dehors des sommets. En chacun des sommets A, B, C, (D) rencontre (Γ) en c points; le nombre total des points communs est, par suite, $c + 3c = 4c$. Le théorème de Bezout sur le nombre des points d'intersection de deux courbes, prouve que le degré de (Γ) est bien $2c$.

Cas particulier où la courbe (C) *est une conique* (C′) *tangente aux trois côtés du triangle* ABC *(fig. 3).*

A cette conique (C′) correspond d'après la transformation,

une droite et inversement, à une droite de la deuxième figure, correspondra dans la première une conique inscrite dans le triangle ABC.

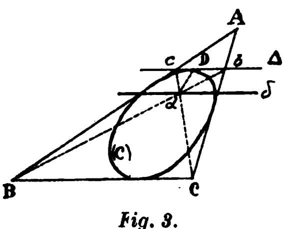


Fig. 8.

En effet, soit Δ une tangente à (C'). On sait que : *les cordes de contact et les sécantes communes à trois coniques, dont deux sont bitangentes à la troisième, concourent en un même point*, nous montre que les coniques (Δ, BC), (AC, AB) bitangentes à (C') sont telles que les sécantes communes B*c*, B*b* et la corde de contact δ se coupent au même point *d*. Le lieu de ce point est donc δ qui est ainsi la transformée de (C'). Inversement, à un point *d* de δ correspond une droite Δ qui touche la conique (C') dont δ est la tranformée au point D de rencontre de Δ avec la conjuguée harmonique de δ par rapport à *dc*, *db*.

Nous déduisons de là que la conique (C'). dont la transformée est une tangente δ à (Γ), est inscrite dans le triangle ABC et touche (C) au point D situé sur Δ, construit comme nous venons de l'indiquer.

4° Une conique (C') inscrite dans le triangle ABC rencontre (C) en 2*m* points.

Théorème IV. — *On considère une courbe* (Γ), *le nombre des coniques* (D), *tangentes à une droite donnée quelconque* δ *et à la courbe* (Γ), *est* 2m.

En effet, à chaque point D de rencontre des deux courbes (C') et (C) correspond une conique (D) tangente à δ et à (Γ) et circonscrite toujours à ABC.

Corrélatif. — *Le nombre des coniques inscrites dans* ABC *passant par un point donné et tangentes à une courbe de classe* 2c *et admettant trois tangentes d'ordre* $c = m(m-1)$ *est* 2m.

Remarque. — On peut retrouver encore le degré de (Γ) en s'appuyant sur ce qu'une conique (C') inscrite dans ABC a avec (C) un nombre de tangentes communes égal à 2*c*. A chacune de ces tangentes correspond un point *d* de (Γ), à la

courbe (c') une droite δ qui renferme les $2c$ points d. D'où le degré de (Γ).

5° Une conique (S) quelconque du plan du triangle rencontre (C) en $2m$ points.

Comme la transformée d'une conique (S) est, d'après ce que nous avons dit au sujet de la courbe (Γ) transformée d'une courbe (C), une quartique admettant les trois points A, B, C comme points doubles, il en résulte cette propriété remarquable :

Si l'on considère une courbe (Γ) d'ordre $2m(m-1)$ admettant trois points A, B, C d'ordre $m(m-1)$ et une quartique (γ) admettant les trois points A, B, C comme points doubles, le nombre des coniques (D) circonscrites à ABC et tangentes aux courbes (Γ), (γ) est $2m$. *(A suivre.)*

RECHERCHE DE COURBES PLANES

QUARRABLES OU RECTIFIABLES

sans autres transcendantes que les logarithmes et les arcs de cercle

Par M. **Aubry.**

(*Suite*, voir page 157).

20. — On obtient de nombreux groupes de courbes rectifiables en supposant que l'expression de ds ou $\sqrt{1+y'^2}\,dx$ est de la forme d'une intégrale connue, comme par exemple $\sqrt{X}\,dX = \sqrt{X}X'dx$, ce qui donne

$$y = \int\sqrt{XX'^2 - 1}\,dx \qquad \text{et} \qquad s = \int\sqrt{X}X'\,dx = \frac{2}{3}X^{\frac{3}{2}}.$$

La difficulté est ramenée à déterminer y

Soit $X = ax^m + b$, on aura

$$y = \int\sqrt{m^2a^2x^{3m-2} + m^2a^2bx^{2m-2} - 1}\;dx.$$

On sait que l'expression $\alpha x^m + \beta x^n + \gamma x^p$ est un carré parfait dans les trois cas suivants

$$m + p = 2n \quad \text{et} \quad \beta^2 = 4\alpha\gamma,$$
$$n + m = 2p \quad \text{et} \quad \gamma^2 = 4\beta\alpha,$$
$$p + n = 2m \quad \text{et} \quad \alpha^2 = 4\gamma\beta.$$

La partie sous radical sera un carré parfait positif dans le seul cas suivant

$$3m - 2 = -(2m - 2) \quad \text{et} \quad 1 = 4(m^2a^2)(m^2ab),$$

ce qui donne la solution unique

$$m = \frac{4}{5}, \qquad b = \frac{625}{1\,024a^4} \qquad (a \text{ arbitraire}).$$

Par suite, on a

$$y = \int(max^{\frac{3m-2}{2}} - ma\sqrt{b}\,x^{m-1})dx = \frac{2}{3}ax^{\frac{6}{5}} - \frac{25}{32a}x^{\frac{4}{5}};$$

$$s = \frac{2}{3}\left(ax^{\frac{4}{5}} + \frac{625}{1\,024a^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

21. — De même, en posant $ds = \dfrac{X'dx}{X}$, on trouve

$$y = \int\sqrt{\frac{X'^2 - X}{X}}\,dx, \qquad s = 2\sqrt{X},$$

si, par exemple, on fait $X = x^2 + ax + b$, il viendra

$$X' = 2x + a, \qquad y = \int\sqrt{\frac{3x^2 + 3ax + a^2 - b}{x^2 + ax + b}}\,dx.$$

Le numérateur est un carré parfait si $(3a)^2 = 4.3(a^2 - b)$, ou si $b = \dfrac{a^2}{4}$; mais dans ce cas le dénominateur se trouve lui-même un carré parfait.

On a ainsi

$$y = \sqrt{3}\int\frac{xdx}{x + \frac{a}{2}} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\int\frac{dx}{x + \frac{a}{2}}$$

$$s = 2\sqrt{x^2 + ax + b} = 2x + a.$$

Si on fait $X = ax^m + b$, on trouve, en cherchant à rendre le numérateur carré parfait, les deux solutions

$$m = \frac{2}{3}, \quad b = -\frac{4}{3}a^{\frac{2}{3}} \qquad \text{et} \qquad m = \frac{4}{3}, \quad b = \frac{64}{81}a^2$$

qui donneront deux autres groupes de courbes rectifiables.

En général en posant $ds = X^mX'dx$, on voit que la courbe $y = \int\sqrt{(X^mX')^2 - 1}\,dx$ se rectifie ainsi $m + 1)s = X^{m+1}$.

22. — Dans le même ordre d'idées, posons

$$y = \int \sqrt{X^2 - 1}\, dx$$

on aura $\quad ds = X'dx = dX \quad$ d'où $\quad s = X$.

Soit, par exemple, $X' = ax^3 + x$, il viendra

$$y = \int x\sqrt{9a^2x^2 + 6a}\, dx, \qquad s = ax^3 + x.$$

On trouverait d'autres courbes rectifiables en donnant successivement à X' les valeurs :

$$a + x, \quad \frac{1}{x + a}, \quad \sqrt{x^2 + a}, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \frac{1 - x}{x},$$

$$\sqrt{\frac{1 + x}{x}}, \quad \sec x, \quad \sqrt{2}\cos x, \ldots$$

23. — Posons $y = \int \sqrt{X'^2 \pm 2X'}\, dx$, on aura

$$ds = (X' \pm 1)dx \quad \text{d'où} \quad s = X \pm x.$$

Soit, par exemple, $X' = ax^2$, il viendra

$$y = \int x\sqrt{a^2x^2 \pm 2a}\, dx = \frac{1}{a^2}\int ax\sqrt{a^2x^2 \pm 2a}\, d(ax) = \frac{(a^2x^2 \pm 2a)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}.$$

On a ainsi les deux groupes de courbes algébriques et algébriquement rectifiables représentées par l'équation

$$9ay^2 = (ax^2 \pm 2)^3 \qquad (a, \text{ arbitraire}).$$

On aura d'autres solutions pour les valeurs de X' :

$$a + x, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x + a}, \quad \frac{1 + x}{x}, \quad \frac{1 + x}{1 - x}, \ldots$$

24. — Soit la courbe $y^2 = 4X$, on aura, en différentiant,

$$yy' = 2X';$$

d'où $\quad y'^2 = \dfrac{4X'^2}{y^2} = \dfrac{X'^2}{X}, \qquad ds = \sqrt{\dfrac{X + X'^2}{X}}\, dx.$

La courbe est rectifiable si cette différentielle est intégrable.

Faisons, par exemple, $X = ax^m + bx^2$, on aura

$$X' = max^{m-1} + 2bx,$$

d'où $X + X'^2 = m^2a^2x^{2m-2} + (4mb + 1)ax^m + (4b + 1)bx^2$, carré parfait si $(4mba + a)^2 = 4(m^2a^2)(4b^2 + b)$, ou si $b = \dfrac{1}{4m(m - 2)}$. La valeur de ds est donc ramenée à

$$(\alpha) \qquad \frac{max^{m-2} + \sqrt{4b^2 + b}}{\sqrt{ax^{m-2} + b}}\, dx.$$

Cette expression se compose de deux différentielles binômes et, par suite, elle est intégrable dans deux cas : 1° si les deux nombres $\frac{m-1}{m-2}$ et $\frac{1}{m-2}$ sont des entiers k et l. Or il est visible que si $\frac{1}{m-2}$ est un entier l, $\frac{m-1}{m-2}$ sera aussi un entier $k = 1 + l$; les deux conditions n'en font donc qu'une ; il suffit que m soit de la forme $\frac{1+2l}{l}$. Faisons donc $l = \ldots,$ $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ il viendra

$$m = \ldots, \frac{7}{4}, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, 1, 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$$

Mettant ces valeurs dans l'expression de b, on aura une infinité de solutions qui en contiendront chacune une infinité, puisque a reste arbitraire. L'équation générale de ces courbes est

$$\left(y^2 - \frac{l^2}{1+2l}\,\frac{x^2}{4}\right)^l = a^l x^{1+l} \qquad (l, \text{ entier pos. ou nég.}).$$

2° Si les nombres $\frac{m-1}{-m+2} - \frac{1}{2} = k$ et $\frac{x}{-m+2} - \frac{1}{2} =$ sont entiers, l'intégration de (α) peut encore avoir lieu. Or ces deux conditions n'en font qu'une ; par conséquent, la courbe est rectifiable si m est de la forme $\frac{4l}{1+2l}$.

Faisant $l = \ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots,$ on trouvera les nouvelles solutions

$$m = \ldots, \frac{16}{7}, \frac{12}{5}, \frac{8}{3}, 4, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{12}{7}, \frac{16}{9}, \ldots$$

L'équation générale est

$$\left(y^2 - \frac{(1+2l)^2}{16l(2l-1)}\,x^2\right)^{1+2l} = a^{1+2l}x^{4l}. \qquad \text{(id.)}$$

Comme second exemple, nous poserons $X = a + bx^m$, ce qui nous donnera les deux groupes

$64(y^2 - a)^3 = 81ax^4$, $16(y^2 - a)^3 = 9a^2x^2$ (a quelconque).

Cette dernière courbe a déjà été obtenue au numéro précédent.

25. — Posons $y = \int \frac{dx}{\sqrt{X^2 - 1}}$, il viendra

$$ds^2 = \frac{dx^2}{X^2 - 1} + dx^2 = \frac{X^2}{X^2 - 1}\,dx^2,$$

d'où
$$s = \int \frac{X dx}{\sqrt{X^2 - 1}}.$$

Soit $X = ax^m$, on aura les deux intégrales binômes

$$y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^{2m} - 1}}, \qquad s = a\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2x^{2m} - 1}}.$$

La première est résoluble si $\frac{1}{2m}$ est un nombre entier positif ou négatif; mais alors la seconde est également résoluble puisqu'on a $\frac{m+1}{-2m} + \frac{1}{2} = -k$, nombre entier.

On a donc les courbes en nombre infini correspondant aux valeurs suivantes de m

$$\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{5},\ \ldots$$

Cette solution est due à Jean Bernoulli. On en a d'autres en attribuant à X les valeurs :

$$a+bx,\quad \frac{x}{a+bx},\quad \frac{a+x}{a-x},\quad \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2},\quad \sqrt{\frac{x+a}{x+a}},$$

$$\sqrt{1+ax^m},\quad \frac{1}{\sqrt{1-ax^m}},\quad 1+ax^m,\quad \frac{1}{1-ax^m},$$

$$a+bx+cx^2,\quad \frac{1}{a+bx+cx^2},\quad \sec x,\quad \frac{\sec x}{\sqrt{2}},\ \ldots$$

Pour la sixième, la septième, la huitième et la neuvième, on est ramené à des intégrales binômes : il y aura lieu de rechercher les valeurs de m qui les rendent solubles. Pour les suivantes, on rendra l'expression sous radical carré parfait.

26. — Soit X une fonction de x telle que l'expression $\frac{dx}{X'}$ soit intégrable : la courbe $2y = X - \int\frac{dx}{X'}$ sera rectifiable. En effet on tire de là

$$2y' = X' - \frac{1}{X'}, \qquad 2ds = \sqrt{4 + 4y'^2}\,dx = X'dx + \frac{dx}{X'},$$

d'où
$$2s = X + \int\frac{dx}{X'}.$$

Ainsi, soit $X = ax^m$, m désignant un nombre réel quelconque différent de 1 ; on aura

$$2y = ax^m - \frac{1}{am}\int x^{-m+1}dx = ax^m - \frac{1}{am(m-2)x^{m-2}}.$$

On a ainsi la nouvelle série de courbes algébriques

$$2am(m-2)yx^{m-2} - a^2m(m-2)x^{2m-2} - 1 = 0,$$

qui se rectifient algébriquement à l'aide de la formule

$$s = \frac{ax^m}{2} - \frac{1}{am(m-2)x^{m-2}}.$$

Le principe de cette solution est dû à Newton *(Methodus fluxionum)*. Prouhet l'a indiquée dans une note à la suite du *Cours d'Analyse* de Sturm.

Faisant par exemple $m = -2, -1, , \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, 4,$ on trouve les courbes

$16ayx^2 - x^6 - 8a^2 = 0$ (Newton), $\quad 36a^2y^2 - x(3a^2x - 4)^2 = 0,$

$6ayx - x^4 - 3a^2 = 0$ (Id.), $\quad 100a^2y^2x - (5a^2x + 4)^2 = 0,$

$36a^2y^2 - x(4x - 3a^2)^2 = 0, \quad 6ayx - 3a^2x^4 - 1 = 0,$

$8a^2x^{\frac{4}{3}} - 16ay - 9x^{\frac{2}{3}} = 0, \quad 16ayx^2 - 8a^2x^6 - 1 = 0,$

qui sont rectifiables algébriquement.

On trouvera d'autres courbes particulières pour les valeurs suivantes de X' :

$$x, \quad 1 + x^2, \quad 1 + x, \quad \sqrt{1+x}, \quad \frac{1+x}{1-x},$$
$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad x\sqrt{a+x}, \quad x^m(a + bx^n)^{\frac{p}{q}}, \quad a^x,$$
$$\sin x, \quad \sin^2 x, \quad \operatorname{tg} x, \ldots$$

27. — Soient U et Υ, deux fonctions de u ; si l'on a

$$y = U - \Upsilon \qquad \text{et} \qquad x = 2\int\sqrt{U'\Upsilon'}du,$$

on en tirera

$$dy^2 = (U' - \Upsilon')^2du^2 \qquad \text{et} \qquad dx^2 = 4U'\Upsilon'du^2,$$

d'où $\quad ds = U'du + \Upsilon'du \quad$ et $\quad s = U + \Upsilon.$

Par exemple, soit

$$U = u^2 + 2u, \qquad 4\Upsilon = u^2 - 2u,$$

on aura $\quad 4y = 3u^2 + 10u, \quad x = 2\int\sqrt{u^2 - 1}\,du,$

$$l = u\sqrt{u^2 - 1} - \left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right), \qquad 4s = 5u^2 + 6u.$$

On aura d'autres solutions en faisant

$$U = au^m, \quad 4\Upsilon = bu^n$$
$$3U = u^3, \quad 2\Upsilon = u^2 - 2u$$
$$3U = u^3, \quad 3\Upsilon = 3u - u^3,$$
$$U = u^n, \quad \Upsilon = (u^n + 1)^m,$$

$U = au$, $\Upsilon = \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$, $4U = 2u - \sin 2u$, $\Upsilon = 2u - \sin 2u$.
$U = au^2 + bu + c$, $\Upsilon = \alpha u^2 + \beta u + \gamma$, $U = u$, $\Upsilon = \operatorname{tg} u$,
$U = \sin u$, $\Upsilon = -\cos u$, ou $-\operatorname{cotg} u$, $U = u$, $\Upsilon = \operatorname{tg} u - u$,
$U = u$, $\Upsilon = \sin u$, $U = \operatorname{tg} u - u$, $\Upsilon = l\sqrt{\sin u}$.

En faisant $\Upsilon' = \frac{1}{4U'}$, on a $y = U - \int \frac{dU}{U'}$, $x = u$: on retrouve la formule du numéro précédent. On peut aussi la retrouver en posant dans celle du n° 22

$$X' = \frac{\Xi}{4} + \frac{1}{\Xi},$$

et changeant ensuite Ξ en X (*).

28. — On obtiendra une infinité de groupes de courbes algébriques et algébriquement rectifiables à l'aide des formules suivantes

$$y = \int U(\Upsilon^2 - 1)du, \quad x = 2\int U\Upsilon du, \quad s = \int U(\Upsilon^2 + 1)du$$

en prenant pour U et Υ des fonctions entières de u.

Par exemple, en posant $U = \Upsilon = u$, on trouve la courbe

$$2(2y - x)^2 = 27x^3,$$

qui se rectifie par la formule

$$8s = 4x - 27x^{\frac{3}{2}}.$$

L'élimination de u pourra de même se faire dans d'autres cas, par exemple si $U = au^m$ et $\Upsilon = Au^n + Bu^p + Cu^q + \ldots$, $m, n, p, q, \ldots$ étant quelconques.

Si U et Υ contiennent des diviseurs ou des transcendantes, la courbe et sa rectification seront en général transcendantes, mais on pourra toujours les définir si les intégrales $\int U du$, $\int U\Upsilon du$, $\int U\Upsilon^2 du$ sont résolubles.

(A suivre.)

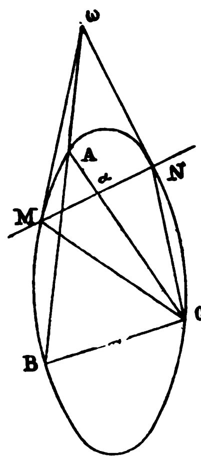
(*) On doit à M. Schlömilch le résultat suivant, analogue à celui du n° 27,
$y = U + \int\sqrt{2U'\Upsilon'}\,du$, $\quad x = \Upsilon + \int\sqrt{2U'\Upsilon'}\,du$ $\quad s = U + \Upsilon + \int\sqrt{2U'\Upsilon'}\,du$.

NOTE DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Ch. Michel**, élève au collège Chaptal.

On peut modifier l'énoncé du théorème de Frégier, de manière à obtenir une propriété des triangles conjugués par rapport à une conique.

Soit O le point pris sur la conique. OM et ON étant les rayons doubles de l'involution, le point de Frégier ω est le point d'intersection des tangentes en M et N à la conique, et, par suite, le pôle de MN. Considérons deux rayons conjugués quelconques OA et OB de l'involution, qui rencontrent MN en α et β. Ces points sont conjugués harmoniques par rapport à M et N et, par conséquent, le triangle $\omega\alpha\beta$ est un triangle conjugué par rapport à la conique. La propriété énoncée par Frégier est que la corde AB passe par le point ω; en d'autres termes, qu'il y a un triangle OAB, inscrit dans la conique et circonscrit au triangle $\omega\alpha\beta$. La propriété ayant lieu pour toute involution, nous pouvons faire varier le point O sur la conique et, par suite, nous avons le théorème suivant :



Étant donné un triangle conjugué par rapport à une conique, il existe une infinité de triangles inscrits dans la conique et circonscrits à ce triangle.

Cette propriété est caractéristique des triangles conjugués; en d'autres termes, *s'il existe une infinité de triangles inscrits dans une conique et circonscrits à un triangle donné, ce triangle est conjugué par rapport à la conique.*

Considérons, en effet, deux des sommets A et B du triangle donné. Je dis que le troisième C est le pôle de AB; $\alpha\beta\gamma$ étant un triangle inscrit dans la conique et circonscrit au triangle ABC; nous obtenons tous les triangles de la même

espèce en faisant varier γ sur la conique. M et N étant les points d'intersection de AB et de la conique, amenons γ en l'un des points M; alors $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$ sont confondus avec AB et par suite le côté $\alpha\beta$ est confondu avec la tangente en N, qui passe alors par le point C; le point C, étant de même sur la tangente en M, est le pôle de AB. Par symétrie, A est le pôle de BC et par suite le triangle ABC est conjugué par rapport à la conique.

Remarquons que si A et B sont, non plus deux points conjugués, mais deux points quelconques, l'enveloppe de $\alpha\beta$, quand γ varie sur la conique, est une conique. De sorte que, par le point C, il passe deux de ces droites. Pour qu'il en passe une infinité, il faut et il suffit qu'il en passe trois. Nous avons donc ce théorème :

Pour qu'un triangle soit conjugué par rapport à une conique, il faut et il suffit qu'il existe trois triangles inscrits dans la conique et circonscrits au triangle.

En transformant cette proposition par polaires réciproques, nous obtenons le théorème suivant :

Pour qu'un triangle soit conjugué par rapport à une conique, il faut et il suffit qu'il existe trois triangles circonscrits à la conique et inscrits dans le triangle.

BIBLIOGRAPHIE

MANNHEIM (le Colonel A.), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et développements de la Géométrie cinématique.** Ouvrage contenant de nombreuses applications à la Théorie des surfaces. In-4°, avec 186 gravures; 1894. — Prix : 25 fr.

Cet ouvrage considérable débute par les premiers principes de la géométrie cinématique. Puis il contient l'exposé méthodique des nombreux travaux de l'auteur relatifs aux propriétés des déplacements des figures. Les déplacements non complètement définis font l'objet d'une étude spéciale. Cette étude, du domaine exclusif de la géométrie cinématique donne lieu à un grand nombre de résultats intéressants qu'on ne saurait trouver ailleurs.

« C'est un beau livre », a dit M. Rouché en analysant cet ouvrage dans un article (*) auquel nous tenons à nous associer. Certes, ce livre honore

(*) Numéro de juillet, *Nouvelles Annales*, p. 293.

grandement celui qui l'a écrit. Le colonel Mannheim vient de rendre à la science un service qui, pour n'être peut-être pas apprécié par tous à sa juste valeur, est cependant très grand. La géométrie cinématique n'est encore ni bien comprise, ni bien définie dans certains esprits. On peut espérer, en s'appuyant sur l'histoire, sur certains précédents très heureusement rappelés par M. Rouché, à la fin de son article, qu'un temps viendra où l'on rendra aux travaux du colonel Mannheim toute la justice qu'ils me paraissent mériter. En France, si nous avons bien observé, l'esprit est peu tourné vers les spéculations de la géométrie pure. C'est la conséquence inévitable, regrettable assurément, de la direction que les programmes impriment aux étudiants en mathématiques. Poncelet et Chasles, le premier avec son *Traité des propriétés projectives*, le second, avec son *Aperçu historique*, ces deux livres où abondent les idées mathématiques les plus admirables, celles qui sont à la fois simples et fécondes, n'ont pas échappé, pendant longtemps, à cette opposition, plus ou moins sourde, des analystes. Au fond, n'est-elle pas naturelle, à qui ne voit et ne connaît que l'Analyse? Et pourtant, n'est-il pas juste de dire qu'il y a, pour la culture du champ mathématique, deux outils; précieux, l'un et l'autre; également ou non, il n'importe? Celui qui manie l'un, ne doit pas faire fi de l'autre; ils peuvent être, suivant les circonstances, plus utiles ou plus pénétrants et l'on peut affirmer en toute certitude que le livre de M. Mannheim ne contribuera pas peu à répandre dans les générations qui viennent, et cela pour le plus grand bien des recherches mathématiques, le goût de la géométrie (*). *G. L.*

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1894

Solution par M. BALITRAND.

On donne un triangle ABC *dont les côtés ont respectivement pour équations*

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0.$$

Une conique S *touchant en* A *et* B *les côtés* CA *et* CB *de l'angle* ACB *a pour équation*

$$XY - Z^2 = 0.$$

Sur cette conique S *on prend le point* μ *défini par les équations* $x = y = z$ *et un point variable* M*; enfin, on désigne par* v *le point où la droite* Cμ *rencontre la corde des contacts* AB.

Cela posé, on joint le point M *à l'un des deux points* m *de la*

(*) La géométrie cinématique est un simple chapitre de la géométrie infinitésimale; un grand chapitre assurément. Mais il reste à écrire celle-ci, à montrer toute la fécondité de ses méthodes, toute l'élégance et la rigueur de ses procédés.

droite AB *qui ont même polaire par rapport aux angles* AMB, μMν.

1° Démontrer que, le point M *décrivant la conique* S, *la droite* Mn *enveloppe une courbe* Σ *du 4e ordre et de 3e classe dont l'équation tangentielle est :*

$$u^3 + v^3 = uvw.$$

2° Aux points où une droite D *rencontre la courbe* Σ *on mène à cette courbe les tangentes* T_1, T_2, T_3, T_4 *et on considère la conique inscrite dans le pentagone formé par ces quatre tangentes et la droite* AB. *Démontrer que si l'on assujettit la conique* C_1 *à passer par un point* P, *la droite* D *enveloppe une conique* C_2.

3° Montrer que la conique C_2 *se réduit à deux points* f *et* f' *quand le point* P *est sur une certaine conique* C_3. *Trouver dans ces conditions : 1° l'enveloppe* Σ' *de la droite* ff' *; 2° le lieu des points* f *et* f'.

Les coordonnées d'un point M de la conique $XY - Z^2 = 0$, peuvent s'exprimer en fonction d'un paramètre λ au moyen des formules :

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{z}{1}.$$

Le point μ a pour coordonnées $x = y = z = 1$. Les équations des droites AM, BM, vM, μM sont :

$$(1) \qquad y - \frac{1}{\lambda}z = 0 \qquad x - \lambda z = 0,$$

$$(2)\ x - \lambda z - \left(y - \frac{1}{\lambda}z\right) = 0, \quad x - \lambda z + \lambda\left(y - \frac{1}{\lambda}z\right) = 0.$$

En appelant $(\alpha, \beta, 0)$ les coordonnées du point m, et exprimant que ce point a même polaire par rapport aux couples de droites (1) et (2) on trouve

$$\alpha = \pm \beta\sqrt{-\lambda}.$$

Choisissons le signe $-$ par exemple et posons $\mu^2 = -\lambda$, l'équation de la droite Mm devient :

$$(3) \qquad \mu x + \mu^2 y + (1 + \mu^3)z = 0,$$

en l'identifiant avec

$$ux + vy + wz = 0,$$

on trouve $$\frac{u}{\mu} = \frac{v}{\mu^2} = \frac{w}{1 + \mu^3},$$
d'où en éliminant μ
$$(4) \qquad u^3 + v^3 - uvw = 0.$$
L'équation du point d'intersection des deux tangentes correspondant aux valeurs μ et μ' du paramètre μ est :
$$u(\mu + \mu' - \mu^2\mu'^2) + v[\mu\mu'(\mu + \mu') - 1] - w\mu\mu' = 0,$$
d'où en faisant $\mu = \mu'$
$$u(2\mu - \mu^4) + v(2\mu^3 - 1) - w\mu^2 = 0.$$
Les coordonnées du point de contact de la tangente (3) sont donc
$$x = \mu^4 - 2\mu \qquad y = 1 - 2\mu^3 \qquad z = \mu^2.$$
La courbe (4) est donc du quatrième ordre. D'ailleurs, cela résulte aussi de ce que le côté AB est une tangente double de la courbe (4).

Soit
$$ux + vy + wz = 0,$$
l'équation d'une tangente à la courbe (4), l'équation du point de contact est
$$U(3u^2 - vw) + V(3v^2 - uw) - Wuv = 0,$$
et en exprimant qu'il est sur la droite D
$$u_1x + v_1y + w_1z = 0,$$
on a $$3u_1u^2 + 3v_1v^2 - u_1vw - v_1uw - w_1uv = 0.$$
C'est l'équation tangentielle d'une conique qui touche les quatre droites T_1, T_2, T_3, T_4 et le côté AB. L'équation ponctuelle de cette conique s'établit sans difficulté et l'on trouve :
$$- u_1x^2 - v_1y^2 - (w_1^2 - 36u_1v_1)z^2 + 2(v_1w_1 + 6u_1^2)yz + 2(u_1w_1 + 6v_1^2)zx + 2u_1v_1xy = 0.$$
Si l'on considère les coordonnées x, y, z comme données et les coordonnées u_1, v_1, w_1 comme variables, c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe de la droite D, c'est l'équation de la conique C_2. En ordonnant par rapport à u_1, v_1, w_1 et supprimant les accents on a
$$u^2(12yz - x^2) + v^2(12zx - y^2) - w^2z^2 + 2vwyz + 2uwzx + 2(18z^2 + xy)uv = 0.$$
Décomposons le polynome du premier membre en carrés, nous trouvons

$$(5)\begin{cases} -\frac{1}{z^2}(-wz^2+vyz+uxz)^2 \\ +\frac{1}{12y^2}12uyz+[18z^2+2xy)v]^2-\frac{(9z^2-xy)^2v^2}{3yz}=0. \end{cases}$$

La conique C_2 se décompose en deux points, si le point (x, y, z) se trouve sur la conique

$$(6) \qquad 9z^2-xy=0.$$

En tenant compte de cette condition, l'expression (5) s'écrit

$$(ux+vy-wz)^2-\frac{4y}{3z}(3uz+vx)^2=0.$$

Les points f et f' dans lesquels se décompose la conique C_2 sont déterminées par les équations

$$ux+vy-wz=0, \qquad vx+3uz=0.$$

On peut d'ailleurs poser, en vertu de (6),

$$x=3\lambda, \qquad y=\frac{3}{\lambda}, \qquad z=1.$$

Dans ces conditions, l'enveloppe de ff' a pour équation tangentielle

$$3u^3+3v^3+uvw=0.$$

Les coordonnées d'une tangente à cette courbe s'expriment en fonction d'un paramètre μ, au moyen des formules

$$u=\mu \qquad v=\mu^2 \qquad w=-3(1+\mu^3).$$

Les points f et f' ont pour équations

$$u\left(x\pm 3z\sqrt{\frac{4y}{3z}}\right)+v\left(y\pm x\sqrt{\frac{4y}{3z}}\right)-wz=0.$$

Les lieux de ces points sont représentés par les équations

$$x=3(\mu^4\pm 2\mu) \qquad y=3(1\pm 2\mu^3) \qquad z=\mu^2;$$

après avoir posé $\lambda=-\mu^2$.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 163.)

37. — *Trouver la normale pour laquelle la distance* PP *est minima.* (P *est le pôle de la normale, et* P' *est le point de rencontre de la perpendiculaire élevée au centre de courbure* C *à* PC *avec la tangente au pied* M *de la normale.)*

On a $$PP' = MP + MP'.$$
Or, d'après l'équation (10) de l'exercice 31,
$$MP = \frac{p}{n}(1 + n^2)^{\frac{3}{2}},$$
et, d'après l'exercice 32,
$$MP' = pn(1 + n^2)^{\frac{3}{2}};$$
on a donc $$PP' = \frac{p}{n}(1 + n^2)^{\frac{5}{2}}.$$
En annulant la dérivée de cette expression par rapport à n, on trouve
$$n = \frac{1}{2};$$
et, pour les coordonnées de M,
$$x = \frac{p}{8}, \qquad y = -\frac{p}{2}.$$

38. — *Trouver la normale à la parabole, telle que l'aire du triangle formé par la corde normale comme base et le pôle de la normale comme sommet opposé, soit minima.*

On a, d'après l'exercice 31, en appelant S l'aire du triangle PMN,
$$S = \frac{1}{2}\cdot MN.MP = \frac{p^2}{n^3}(1 + n^2)^3 = p^2\left(n + \frac{1}{n}\right)^3.$$
On trouve que le minimum de S a lieu pour
$$n = 1;$$
la valeur du minimum est $8p^2$.

Remarque. — On sait que cette normale inclinée à 45° sur l'axe est telle que l'aire du segment parabolique compris entre la corde normale et la parabole, soit minima. Comme l'aire de ce segment parabolique est les $\frac{2}{3}$ de S, il en résulte que la normale inclinée à 45° sur l'axe correspond tout à la fois au minimum de l'aire du segment parabolique et au minimum de l'aire S.

39. — *Trouver la normale à la parabole, telle que le triangle formé par le pied de la normale, son pôle et le centre de courbure situé sur la normale, ait son aire minima.*

On a, en désignant par S cette aire, et d'après l'exercice 31,
$$S = \frac{1}{2} PM.MC = \frac{p^2}{2n}(1 + n^2)^3.$$
En annulant la dérivée de S, par rapport à n, on trouve
$$n = \frac{1}{\sqrt{5}},$$
et pour les coordonnées de M,
$$x = \frac{p}{10}, \qquad y = -\frac{p}{\sqrt{5}}.$$

EXERCICE ÉCRIT

81. — Une droite Δ, mobile, rencontre constamment une droite fixe Δ' et elle s'appuie normalement, sur une circonférence donnée Γ. Trouver le lieu décrit par Δ.

Notes sur l'exercice 80.

En prenant, dans des positions diverses, deux coniques : l'une, dans le plan zOx ; l'autre, dans le plan zOy ; on peut, en adaptant à ces coniques l'énoncé de cet exercice, obtenir de nombreux lieux géométriques ; quelques-uns, intéressants.

Dans le cas très simple que nous avons proposé, on peut arriver au résultat demandé en raisonnant comme il suit

Posons $\quad OM = \lambda, \quad OA = U, \quad OB = u.$

Il existe une relation entre u, U. Pour la trouver, on cherche celle qui existe entre λ, U ; on trouve facilement

$$R^2\lambda = U^2(\lambda - 2R),$$

R désignant le rayon de la circonférence Δ : on trouve, de même, r étant le rayon de Δ',

$$r^2\lambda = u^2(\lambda - 2r) ;$$

et, par suite,

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{r}{u^2} - \frac{R}{U^2}.$$

L'équation de AB étant $\quad \dfrac{x}{U} + \dfrac{y}{u} = 1,$

l'enveloppe s'obtient facilement, en tenant compte de la relation (1). On doit pourtant, pour abréger le calcul, observer qu'il y a avantage à poser

$$\frac{\sqrt{R}}{U} = \alpha, \qquad \frac{\sqrt{r}}{u} = \beta.$$

On trouve, finalement $\quad \dfrac{x^2}{R} - \dfrac{y^2}{r} = \dfrac{Rr}{R - r}.$ etc...

CONCOURS

DES BOURSES DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

1re Partie. — Par chaque point M d'un plan rapporté à des coordonnées rectangulaires ox, oy, passent deux des hyperboles $a^2xy + ay + x = 0$ où a est un paramètre variable ; sur quelle courbe C le point M doit-il se trouver pour que les deux hyperboles se coupent en ce point à angle droit ?

En combien de points à distance finie et distincts de l'origine la courbe C rencontre-t-elle l'hyperbole $a^2xy + ay + x = 0$?

Quelle relation doit-il exister entre a et b pour que les deux hyperboles $a^2xy + ay + x = 0$, et $b^2xy + by + x = 0$, se coupent à angle droit en un point, autre que l'origine ? Cette relation entre a et b définit une courbe C' ; construire cette courbe. En combien de points réels à

distance finie et distincts de l'origine la courbe c' rencontre-t-elle la courbe c?

2° Partie. — Étant donnés trois nombres inégaux a, b, c, on considère les six points, qui, rapportés à un système d'axes rectangulaires ox, oy, oz, ont pour coordonnées : a, b, c; b, c, a; c, a, b; b, a, c; c, b, a; a, c, b. Démontrer que ces six points sont sur un cercle. Former les équations du plan de ce cercle et du cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour directrice le cercle considéré.

QUESTION 369.

Solution par M. C. Grolleau, répétiteur au lycée de Marseille.

Si l'on considère une strophoïde dont le nœud est le point O, *deux transversales parallèles et symétriques par rapport au point* O *coupent cette courbe respectivement en des points* A, B, C, A', B', C', *tels que*

$$OA.OB.OC = OA'.OB'.OC'.$$

(Barisien.)

L'équation de la strophoïde droite ayant son point double à l'origine est

$$(1) \qquad \rho = \frac{R \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

Soit

$$(2) \qquad \rho(a \cos \omega + b \sin \omega) - 1 = 0,$$

l'équation d'une droite. Éliminons ω entre les équations (1), (2); pour cela, nous écrivons l'équation (1) sous la forme

$$(3) \qquad 2R \cos^2 \omega - \rho \cos \omega - R = 0$$

et l'équation (2) sous la forme

$$b\rho \sin \omega = 1 - a\rho \cos \omega.$$

En élevant cette dernière au carré et en remplaçant $\sin^2 \omega$ par $1 - \cos^2 \omega$, on a à éliminer $\cos \omega$ entre l'équation (3) et la suivante :

$$\rho^2(a^2 + b^2) \cos^2 \omega - 2a \rho \cos \omega - b^2\rho^2 + 1 = 0.$$

On obtient

$$R^2[2 + (a^2 - b^2)\rho^2]^2 - \rho^2[4aR - \rho^2(a^2 + b^2)][1 - b^2\rho^2 + 2aR] = 0,$$

ou

$$4R^2 + \dots - b^2(a^2 + b^2)\rho^6 = 0,$$

donc

$$\overline{OA}^2.\overline{OB}^2.\overline{OC}^2 = \frac{4R^2}{b^2(a^2 + b^2)}.$$

Une droite parallèle, et symétrique par rapport au point O, a pour équation

(4) $\rho(a \cos \omega + b \sin \omega) + 1 = 0.$

L'élimination de ω entre (3) et (4) donne

$$R^2[2 + (a^2 - b^2)\rho^2]^2 + \rho^2[4aR + \rho^2(a^2 + b^2)][1 - b^2\rho^2 - 2aR] = 0,$$

ou $$4R^2 + \ldots - b^2(a^2 + b^2)\rho^6 = 0,$$

donc $$\overline{OA'}^2.\overline{OB'}^2.\overline{OC'}^2 = \frac{4R^2}{b^2(a^2 + b^2)},$$

par suite $$OA.OB.OC = OA'.OB'.OC'.$$

Nota. — Autres solutions par Mme Ve F. PRIME et MM. DROZ-FARNY et E. FOUCART.

QUESTION 374

Solution par Mme Vve F. PRIME.

En un point A situé sur une parabole P, on mène la normale à la parabole. Soit A_1 le point de contact de cette normale avec la développée. Soit, de même, A_2 le centre de courbure de la première développée correspondant à A_1, et A_3 le centre de courbure de la seconde développée correspondant à A_2. Si R_0, R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure successifs de la parabole, de la première et de la seconde développée en A, A_1 et A_2, on a, quel que soit le point A pris sur la parabole, la relation

$$3R_0R_2 = 9R_0 + 4R_1^2. \qquad \text{(Barisien.)}$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées de A;
x_1, y_1 celles de A_1;
x_2, y_2 celles de A_2;
x_3, y_3 celles du centre de courbure A_3 de la seconde développée.

Si m est le coefficient angulaire de la normale en A, on a (*)

$$x_0 = \frac{pm^2}{2}, \qquad y_0 = -pm,$$

$$x_1 = p + \frac{3pm^2}{2}, \qquad y_1 = pm^3,$$

$$x_2 = p - 3pm^4 - \frac{3pm^2}{2}, \qquad y_2 = 4pm^3 + 3pm,$$

$$x_3 = -2p - 15pm^4 - \frac{33}{2}pm^2, \qquad y_3 = -12pm^5 - 11pm^3.$$

(*) Voir : BARISIEN : *Note sur la parabole* (*J. M. E.* 1893).

Il en résulte que $R_0 = p.(1 + m^2)^{\frac{3}{2}},$

$$R_1 = 3pm(1 + m^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$R_2 = 3p(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}.(1 + 4m^2),$$

on a donc $3R_0R_2 = 9R_0^2 + 4R_1^2.$

Nota. — Autre solution par M. GROLLEAU.

QUESTIONS PROPOSÉES

399. — D'un des sommets du rectangle des axes d'une ellipse donnée on abaisse les quatre normales à l'ellipse. Si (x_1, y_1) désignent les coordonnées du pied d'une des normales et (X_1, Y_1) celles du point où cette normale touche sa développée, démontrer les relations

$$X_1X_2X_3X_4 = x_1x_2x_3x_4,$$
$$Y_1Y_2Y_3Y_4 = y_1y_2y_3y_4.$$

(E.-N. Barisien.)

400. — D'un point du plan d'une ellipse on abaisse les quatre normales à cette ellipse. Montrer que si l'on fait la somme des aires des quatre rectangles dont les côtés parallèles aux axes et qui ont pour sommets opposés les pieds des normales et le centre de l'ellipse, cette somme est dans un rapport constant avec l'aire du rectangle analogue, ayant pour sommets opposés le point d'émission des normales et le centre de l'ellipse. *(E.-N. Barisien.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15060-7-94.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE
DE TRANSFORMATION

Par M. **G. Leinekugel**, élève-ingénieur hydrographe.

(*Suite*, voir page 169.)

III. — Application des théorèmes précédents.

La courbe (C) est une conique. La courbe (Γ) est alors une courbe du quatrième degré ayant A, B, C comme points doubles. Ces points doubles deviennent des points de rebroussement quand la conique (C) est circonscrite à ABC.

Les tangentes en ces points doubles se construisent comme il a été dit précédemment. Cette construction met en évidence une démonstration géométrique de ce théorème bien connu relatif aux quartiques trinodales:

Théorème. — *Les six tangentes aux trois points doubles d'une quartique* (Γ) *trinodale sont six droites tangentes à une même conique.*

D'après la construction donnée des tangentes en A, B, C, les quatre tangentes en deux des points B, C et les deux droites Δ_1, Δ_1' conjuguées harmoniques des tangentes Δ, Δ′ à (Γ) par rapport à AB, AC sont six droites tangentes à une conique (*c*). Je dis qu'il en est de même des six droites Δ, Δ′ et des quatre tangentes en B, C à Γ.

Cette propriété résulte du théorème corrélatif à celui de Desargues. Je le rappelle :

Si l'on mène d'un point A *les tangentes aux coniques inscrites dans un quadrilatère, on a un faisceau de droites en involution.*

Ici, dans le faisceau en involution déterminé par les deux

groupes de droites AC, AB; Δ_1, Δ'_1, la droite Δ est l'homologue de Δ'. Si donc nous considérons la conique inscrite dans le quadrilatère $\lambda\mu\nu\rho$ et tangente à Δ, elle sera, en vertu de ce qui précède, tangente à Δ'.

Comme cas particulier, nous concluons :

(α) *Dans toute quartique, admettant trois points de rebroussement, les tangentes en ces trois points sont concourantes.*

Des théorèmes énoncés précédemment, on déduit les suivants relatifs aux quartiques à trois points doubles:

Théorème I. — *Une quartique trinodale est complètement déterminée quand on l'assujettit à être tangente à cinq coniques circonscrites au triangle formé par les trois points doubles.*

On voit comment on pourra construire simplement cette quartique par points et par tangentes si les trois points et les cinq coniques sont données. Il suffira de passer des coniques aux cinq points qui définissent la conique (c).

Théorème II. — *Une quartique admettant trois points donnés comme points doubles est complètement déterminée quand on en donne cinq points.*

De ce théorème on peut déduire la propriété précédente (α). Donner dans une quartique à trois points doubles cinq tangentes revient à donner cinq points infiniment voisins des sommets A, B, C. On voit ainsi que la quartique est alors bien définie.

Théorème III. — *On peut tracer quatre coniques circonscrites au triangle formé par les trois points doubles d'une quartique, tangentes à cette courbe et de plus tangentes à une droite donnée.*

Théorème IV. — *Si l'on considère deux quartiques admettant toutes deux comme points doubles trois points donnés, il existe quatre coniques circonscrites au triangle des points doubles et tangentes chacune aux deux quartiques.*

En vertu des principes sur lesquels repose notre méthode

de transformation, nous voyons que toutes les propriétés projectives des coniques permettront d'énoncer immédiatement des propriétés correspondantes relatives aux quartiques à trois points doubles.

Nous allons en donner quelques exemples :

1° Le lieu des pôles d'une droite Δ fixe par rapport aux coniques (γ) circonscrites à un quadrilatère est une conique (γ') circonscrite au triangle autopolaire commun à toutes ces coniques (γ).

Si l'on prend trois points A, B, C du plan, quelconques, on obtient la proposition suivante :

Il existe une infinité de quartiques (Γ) admettant trois points doubles A, B, C et tangentes à quatre coniques (D) circonscrites au triangle ABC. Si par un point d de son plan on mène deux coniques qui sont tangentes à l'une (Γ) de ces quartiques et circonscrites au triangle ABC, on a deux points de contact qui, avec les trois sommets du triangle, déterminent une conique. L'enveloppe de cette conique est une quartique (Γ') admettant les trois points A, B, C comme points doubles.

Si le point d se déplace, les quartiques (Γ') qui y correspondent ont outre les points A, B, C en commun deux tangentes communes et une conique (D) circonscrite à ABC qui leur est tangente.

Aux quatre sommets du quadrilatère correspondent après la transformation quatre coniques (D) circonscrites au triangle des points doubles, tangentes aux quartiques (Γ) transformées des coniques (γ). Au pôle de la droite Δ correspond une conique (D) circonscrite au triangle, passant par les deux points de contact, qui eux-mêmes correspondent aux deux tangentes issues du pôle à la conique (γ).

2° Les polaires d'un point fixe par rapport aux coniques circonscrites à un quadrilatère passent par un point fixe.

En raisonnant comme précédemment, nous trouvons cette autre propriété :

On considère cinq coniques circonscrites à un triangle ABC ; il existe une infinité de quartiques (Γ) à trois points doubles A, B, C tangentes à quatre de ces coniques. Chacune de ces quartiques rencontre la cinquième conique en deux points

autres que A, B, C. Les deux coniques circonscrites au triangle et tangentes à (Γ) en ces deux points d'intersection se coupent en un quatrième point, dont le lieu est une conique circonscrite au triangle.

3° La propriété corrélative de la première énoncée plus haut est la suivante :

Le lieu des pôles d'une droite fixe par rapport aux coniques inscrites dans un quadrilatère est une droite fixe.

Après transformation, elle conduit à celle-ci :

On considère une des quartiques (Γ) en nombre infini, ayant trois points doubles A, B, C et circonscrites à un quadrilatère. On lui mène d'un point donné les deux coniques circonscrites à ABC et qui lui sont tangentes. Les deux points de contact déterminent avec A, B, C une conique. Toutes ces coniques ainsi déterminées passent par un quatrième point fixe.

4° La seconde propriété (2°) conduirait, si on prenait sa corrélative, à une proposition qui, de même que les précédentes, serait bien difficile à démontrer par le calcul.

Donnons comme dernier exemple la propriété qui correspond après transformation à celle de l'hexagone de Pascal dans les coniques.

On prend six points quelconques $p_1, p_2, \ldots p_6$ sur une quartique (Γ), admettant trois points doubles A, B, C, on trace les six coniques (c_1), (c_2) ... (c_6) circonscrites à ABC et tangentes à (Γ), aux points $p_1, p_2 \ldots p_6$. Outre les sommets du triangle

les coniques	(c_1), (c_2)	se coupent en un point	α_{12},
	(c_4), (c_5)	» »	α_{45},
»	(c_2), (c_3)	» »	β_{23},
	(c_5), (c_6)	» »	β_{56},
»	(c_3), (c_4)	» »	γ_{34},
	(c_6), (c_1)	» »	γ_{61}.

Les couples de points α, β, γ déterminent avec A, B, C trois coniques (Γ_{14}), (Γ_{25}) et (Γ_{36}) se coupant en un même point.

Le théorème relatif à l'hexagone de Brianchon se trans-

forme aussi facilement. Ces quelques exemples montrent combien il est facile d'effectuer la transformation des propriétés projectives des coniques pour en déduire d'autres relatives aux quartiques à trois points doubles,

Il est inutile de faire remarquer qu'en transformant ces propriétés par polaires réciproques, on obtient celles qui sont relatives aux courbes de quatrième classe admettant trois tangentes doubles.

IV. — Nous allons montrer comment on peut déduire aussi de notre méthode de transformation des propriétés relatives aux coniques.

1° Les cordes des contacts δ avec deux des côtés AB, AC des coniques (C) inscrites dans un triangle ABC et tangentes à une droite Δ fixe, passent par un point fixe.

La démonstration de cette propriété connue est immédiate; à l'une des coniques (C) correspondra une droite δ qui passera évidemment par le point fixe d qui correspondra à Δ. Or δ est la corde des contacts considérée.

Si la droite Δ passe à l'infini, les courbes (C) sont alors des paraboles inscrites dans le triangle. Le point d devient le point A' de rencontre des parallèles à AC, AB menées des points B, C. Si l'on construit de même les points B', C', on voit qu'il résulte de là que *toutes les paraboles inscrites dans un triangle* ABC *admettent toutes un triangle autopolaire commun* A'B'C' *et inversement.*

On a ainsi une démonstration géométrique de ces propriétés également bien connues:

Toutes les paraboles ayant un triangle autopolaire commun ont leurs foyers sur le cercle des neuf points de ce triangle, et leurs directrices passent toutes par le centre du cercle circonscrit.

2° Les cordes des contacts δ avec deux des côtés d'un triangle des coniques qui lui sont inscrites et qui passent par un point D donné enveloppent une conique (D).

Cette propriété connue résulte de ce que dans notre transformation la conique (D) qui correspond au point D est précisément tangente à toutes les droites δ.

3° Nous transformerons, pour terminer cette propriété remarquable, due à M. de Longchamps, et dont nous donnerons ensuite une démonstration géométrique :

(α) *Une droite* Δ *se meut en restant parallèle à une direction donnée, l'enveloppe des transversales réciproques de chacune de ces droites* Δ *par rapport à un triangle donné* ABC *est la parabole inscrite dans le triangle et dont la direction des diamètres est la direction donnée.*

La propriété transformée est la suivante :

Un point M *se meut sur une conique* (D) *circonscrite à un triangle* ABC, *on prend les droites* BM′, CM′ *conjuguées harmoniques de* BM, CM *par rapport aux groupes de droites* BA′, *cb et* CA′, *Cc* (A′ est le point de rencontre des parallèles à BA, CA menées des points C, B ; *b, c* sont les milieux des segments AC, AB). *Le lieu de* M′ *est une droite.*

La démonstration géométrique de (α) se déduit simplement de cette propriété (β).

(β) *Dans le plan de deux paraboles dont les axes sont rectangulaires il existe une hyperbole circonscrite au triangle formé par leurs trois tangentes communes et dont les asymptotes sont les tangentes à ces paraboles parallèles aux directions de leurs diamètres.*

Considérons un triangle ABC, le cercle circonscrit et les paraboles (P), (P′) inscrites dans ABC de foyers F, F′ diamétralement opposés. Les droites de Simpson de ces points sont deux transversales réciproques Δ, Δ′ par rapport au triangle, puisque $Cf_a = Bf'_a$ (f_a, f'_a sont les projections de F, F′ sur BC). Il existe donc une hyperbole circonscrite à ABC et admettant les droites Δ, Δ′ comme asymptotes. Les droites Δ, Δ′ sont évidemment à angle droit, puisque les droites AE, AE′ qui donnent les directions des diamètres sont telles que $\widehat{EAE'} = \widehat{FAF'} = 1$ dr (*).

(*) La droite AE′, qui n'a pas été, par oubli, tracée sur la figure, est isogonale de AF′, dans l'angle BAC.

Si nous projetons cylindriquement la figure, nous voyons qu'à une tangente Δ à une parabole (P), correspond une seule hyperbole circonscrite à ABC ayant Δ comme une asymptote. Quant à la seconde Δ', elle est constamment parallèle à la direction des diamètres de (P).

V. — Revenons au cas général. Des propriétés évidentes d'une courbe (Γ) d'ordre $2m(m-1)$ admettant trois points multiples d'ordre $m(m-1)$, nous déduirons des propriétés intéressantes des courbes (C) d'ordre m et de classe c.

Déterminons la classe de la courbe (Γ) transformée d'une courbe (C). La première polaire de (Γ) est de degré $2c-1$, mais elle admet chacun des points multiples de (Γ) comme point d'ordre $c-1$. Le nombre des points communs aux deux courbes en dehors des sommets est donc

$$2c(2c-1) - 3c(c-1) = c(c+1).$$

1° D'un point d *du plan on peut mener* $c(c+1)$ *tangentes à* (Γ).

Nous déduisons de là ce théorème:

Théorème (α). — *Le nombre des coniques* (C) *inscrites dans un quadrilatère et tangentes à une courbe* (C), *de classe* c, *est* $c(c+1)$.

Chacune des tangentes que l'on peut mener d'un point d à (Γ) est la transformée d'une conique (c) inscrite dans le triangle ABC et tangente à la droite Δ dont d est le correspondant d'après la transformation. Ces coniques (c) sont évidemment tangentes à (C).

Remarquons que, si le point d est sur (Γ), le nombre des tangentes diminue de deux, par suite, si un des côtés du quadrilatère touche (C), le nombre se réduit à $c(c+1)-2$.

Théorème corrélatif. — *Le nombre des coniques circonscrites à un quadrilatère et tangentes à une courbe* (C) *de degré* m *est* $m(m+1)$.

Application. — Cas où la courbe (C) *est une conique.*

Nous en déduisons qu'il existe six coniques inscrites dans un quadrilatère (ou circonscrites à un quadrilatère) et tangentes à une conique (C).

Ce nombre se réduit à quatre si l'un des côtés touche C [où l'un des sommets est sur (C)]. Nous avons ainsi, comme cas particulier d'une propriété bien plus générale, la solution de la première question proposée au Concours général (1893).

2° Le nombre des tangentes communes à une conique (D) circonscrite à ABC et à la courbe (Γ) est $2c(c+1)$.

Chaque tangente commune est la transformée d'une conique (c) tangente à (C) et passant par le point D qui, après transformation, donne la conique (D) et de plus tangente aux côtés du triangle.

Théorème (β). — *Le nombre des coniques* (c) *tangentes à trois droites passant par un point* D *et tangentes à une courbe* (C) *de classe* c *est* $2c(c+1)$.

Si la conique (D) est tangente à (Γ), le nombre des tangentes diminue de deux unités, par suite, dans le cas où le point D appartient à (C), le nombre des coniques (c) est

$$2[c(c+1)-1].$$

Théorème corrélatif. — *Le nombre des coniques passant par trois points, tangentes à une droite* Δ *et tangentes à une courbe* (C), *d'ordre* m, *est* $2m(m+1)$.

Ici le nombre diminue, si la droite Δ est tangente à (C), de deux unités.

I. *Cas où la courbe* (C) *est une conique.*

Il existe douze coniques tangentes à trois droites, passant par un point (ou passant par trois points tangentes à une droite) et tangentes à une conique donnée.

II. *Cas où la courbe* (C) *est un système de deux droites.*

Les coniques qui lui seront tangentes passeront par le point de rencontre des deux droites. Le théorème (α) dans ce cas montre qu'il existe deux coniques inscrites dans un quadrilatère et passant par un point (c est évidemment ici égal à 1).

Quant au théorème (β) il montre qu'il existe quatre coniques tangentes à trois droites et passant par deux points.

(A suivre.)

SUR UNE COURBE GAUCHE

Par M. **A. Cazamian.**

Lorsqu'on cherche le lieu des pieds des normales menées, d'un point P, à une famille de coniques homofocales, ou le lieu des points de contact des tangentes, ou le lieu des projections du point P sur ses polaires... etc..., on trouve une même strophoïde ayant son point double en P. (Voir une Note « Sur un lieu géométrique et ses applications », que nous avons publiée dans les *Nouvelles Annales* de Mathématiques, octobre 1893.) Étant donnés une conique et un point P dans son plan; au point P, se trouve ainsi associée une strophoïde qui passe par un grand nombre de points remarquables. Nous avons ainsi résumé ses propriétés, dans l'article cité :

Étant donné un point P *dans le plan d'une conique* Σ, *de centre* O : *les pieds des normales, les points de contact* A *et* B *des tangentes menées de* P *à la conique, les projections du point* P *sur les axes, les foyers* F, F′ *de la conique, le point à l'infini sur la droite* PO, *la projection de* P *sur sa polaire, les points de rencontre des droites* (AF, BF′)(AF′, BF) *sont situés sur une même strophoïde ayant son point double en* P.

Nous avons cherché si, dans l'espace, il n'existerait pas un théorème du même genre. En considérant une quadrique et un point P, nous avons été conduit, en déterminant le lieu des pieds des normales menées de P à la famille de quadriques homofocales à la quadrique donnée, à une courbe gauche du cinquième ordre, qui est en même temps le lieu des projections du point P sur son plan polaire relativement à chacune des quadriques du système. Cette quintique gauche passe aussi par un grand nombre de points remarquables. On peut énoncer le théorème suivant :

Étant donnés une quadrique à centre et un point P, *les pieds des six normales menées de* P *à la quadrique, les projections du*

point P *sur les plans principaux, les pieds des normales menées de* P *à chacune des focales de la quadrique, la projection du point* P *sur son plan polaire, le point à l'infini sur la droite joignant le point* P *au centre de la quadrique, les pieds des normales menées de* P *à la conique de contact avec la quadrique du cône circonscrit, de sommet* P, *sont situés sur une même courbe gauche du cinquième ordre* (*), *ayant un point triple au point* P *et passant par quatre points du cercle imaginaire à l'infini. Les tangentes à la courbe en son point triple sont les normales aux trois quadriques homofocales à la quadrique donnée, qui passent en* P (**).

En considérant la famille homothétique et concentrique à une conique, ou à une quadrique, on a, depuis longtemps, obtenu deux courbes remarquables : l'hyperbole d'Apollonius et la cubique gauche aux pieds des normales. En considérant la famille homofocale, on obtient de même deux courbes tout aussi remarquables : la strophoïde et la quintique gauche.

RECHERCHE DE COURBES PLANES
QUARRABLES OU RECTIFIABLES
sans autres transcendantes que les logarithmes et les arcs de cercle

Par M. **Aubry**.

(*Suite* et *fin*, voir page 175) (***).

29. — Parmi les résultats obtenus par Euler, qui s'est beaucoup occupé de l'application des équations différentielles aux recherches de ce genre, nous donnerons le suivant, qui est le plus simple et le plus élégant. Soit la courbe

$$y = U''_u \sin u - U'_u \cos u, \qquad x = U''_u \cos u + U'_u \sin u,$$

on aura

(*) On sait qu'une quintique gauche est généralement déterminée par 15 points.

(**) Quand le point P est dans un plan principal, la courbe se décompose en une strophoïde, située dans ce plan, et un cercle.

(***) Cette fin d'article a été coupée au numéro dernier par nécessité de la mise en pages.

$$dy = (U''' + U') \sin u du, \qquad dx = (U''' + U') \cos u du,$$

d'où $$s = \int U''' du + \int U' du = U'' + U.$$

La courbe est algébrique et se rectifie algébriquement si U est une fonction entière des sinus et cosinus des multiples de u. Les solutions de ce genre sont donc en nombre infini.

Soit par exemple $2U = -\sin 2u$, il viendra

$$U' = -\cos 2u, \qquad U'' = 2 \sin 2u$$

d'où $y = \cos u(1 + 2 \sin^2 u)$, $\quad x = \sin u(1 + 2 \cos^2 u)$,

$$2s = 3 \sin 2u.$$

Le cercle est le cas particulier correspondant au cas de $U = u$.

EXERCICE ÉCRIT

82. — Une sphère Σ touche un plan P. Dans P, se trouvent deux droites rectangulaires Δ, Δ'. On propose de déterminer un point S tellement choisi que le cône U, de sommet S, circonscrit à Σ, soit coupé par P suivant une parabole touchant les droites Δ, Δ'.

Note sur l'exercice 81.

Pour résoudre cette question, il faut, tout d'abord, faire un choix d'axes qui facilite les calculs.

Nous prenons pour origine le centre O de la circonférence Γ, pour axe Ox, la droite qui va du point O à la trace A de Δ', sur le plan de Γ; pour axe Oy, la perpendiculaire élevée, en O, à Ox, dans le plan de Γ; enfin, pour axe Oz, la parallèle à Δ', menée par O.

Pour exprimer que Δ' rencontre normalement la circonférence Γ, il suffit d'exprimer qu'elle rencontre la normale δ élevée, en O, au plan de Γ.

En général, la perpendiculaire élevée au plan yOx, en un point (a, b), est représentée par les équations

$$a + b \cos \nu = x + y \cos \nu + z \cos \mu,$$
$$a \cos \nu + b = x \cos \nu + y + z \cos \lambda.$$

Dans le cas présent, les équations de δ sont donc

$$x + z \cos \mu = 0,$$
$$y + z \cos \lambda = 0.$$

On peut considérer les droites Δ' comme étant déterminées par des plans tournant autour de deux droites fixes, δ, Δ'. En posant $OA = a$, les équations de Δ' sont

$$x - a = 0, \qquad y = 0;$$

par conséquent, celles de Δ sont

$$x + z \cos \mu + \theta(y + z \cos \lambda) = 0,$$
$$\theta' y + x - a = 0.$$

Les coordonnées de la trace de Δ sur le plan yOx s'obtiennent en faisant $z = 0$; en écrivant qu'elles vérifient l'équation de Γ, on trouve entre les paramètres θ, θ' la relation

$$R^2(\theta - \theta')^2 = a^2(1 + \theta^2).$$

Finalement l'équation de la surface, lieu de Δ, est

$$R^2\left\{a(y + z\cos\lambda) + z(y\cos\mu - x\cos\lambda)\right\}^2 = a^2y^2\left\{(y + z\cos\lambda)^2 + (x + z\cos\mu)^2\right\}.$$

C'est une surface du quatrième degré. Elle se réduit à un cône pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$, résultat évident *a priori*. On pourra étudier sa trace sur le plan zOy et construire la courbe correspondante. On peut aussi observer que les plans passant par Δ' coupent cette surface suivant deux droites et une conique; etc.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir *Journal d'élémentaires*, page 170).

---

337. — *On considère la suite :*

$$Y_0 = 1, \qquad Y_1 = x + 3, \qquad Y_2 = x^2 + 5x + 5, \qquad \ldots$$

$$Y_n = (x + 2)Y_{n-1} - Y_{n-2}.$$

Calculer Y_n *en fonction d'*x.

On trouve :

$$Y_n = x^n + (2n+1)x^{n-1} + (n-1)(2n+1)x^{n-2} + (n-2)\frac{(2n+1)(2n-3)}{1.3}x^{n-3} + \ldots \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}x + (2n+1).$$

Y_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$(x^2 + 4x)\frac{d^2Y_n}{dx^2} + 2(x+3)\frac{dY_n}{dx} - n(n+1)Y_n = 0,$$

d'où, pour calculer le coefficient A_p de x^{n-p}

$$A_p = \frac{2(n-p+1)(2n-2p+3)}{p(2n-p+1)}A_{p-1},$$

$$A_{2k} = \frac{(n-k)(n-k-1)\ldots(n-2k+2)}{1.2.3\ldots k}.\frac{(2n+1)(2n-2k-1)(2n-2k-3)\ldots(2n-4k+3)}{1.3.5.7\ldots(2k-1)},$$

$$A_{2k+1} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)\ldots(n-2k+1)}{1.2.3\ldots k}.\frac{(2n+1)(2n-2k-1)(2n-2k-3)\ldots(2n-4k+1)}{1.3.5.7\ldots(2k+1)},$$

ou plus simplement pour le coefficient de x^m

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m)}{1.2.3\ldots 2m(2m+1)}(2n+1),$$

$$Y_n = 2(X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1}) + X_n,$$

X ayant même signification qu'à l'exercice précédent.

338. — *On considère la suite :*

$$Z_0 = 1, \quad Z_1 = x + 2, \quad Z_2 = x^2 + 4x + 3, \quad \ldots$$

$$Z_n = (x+2)Z_{n-1} - Z_{n-2}.$$

Calculer Z_n *en fonction de* x *et de* n.

On trouve :

$$Z_n = x^n + 2nx^{n-1} + (n-1)(2n-1)x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x + n + 1.$$

Z_n satisfait d'ailleurs à l'équation différentielle du second ordre :

$$(x^2 + 4x)\frac{d^2Z_n}{dx^2} + 3(x+2)\frac{dZ_n}{dx} - n(n+2)Z_n = 0,$$

d'où, pour calculer A_p, coefficient de x^p, la formule :

$$A_p = \frac{(n+p+1)(n-p+1)}{2p.(2p+1)}A_{p-1},$$

$$A_p = \frac{(n+p+1)(n+p)\ldots(n-p+2)(n-p+1)}{1.2.3.4\ldots(2p+1)},$$

$$Z_n = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

X ayant même signification qu'à l'exercice n° 336.

Les fonctions considérées dans ces trois exercices, lorsque x reçoit des valeurs numériques entières et positives, résolvent complètement les équations indéterminées :

$$(x+4)X^2 - xY^2 = 4,$$

$$X^2 + xXZ - xZ^2 = 1,$$

(Voir Réalis, *N. A.* 1883.)

339. — *Soit* M *un point dont les coordonnées barycentriques sont* α, β, γ, AM *coupe* BC *en* A_1 ; *sur* BA_1, CA_1 *comme diamètres, on construit des circonférences; soit* l *la longueur de portion de tangente commune extérieure comprise entre les points de contact,* l′, l″, *des quantités analogues pour les côtés* AB, AC, *du triangle* ABC. *Trouver une relation entre* l, l′, l″.

On a

$$l^2 = \frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2\beta\gamma},$$

d'où, par élimination de α, β, γ

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{l'^2} + \frac{c}{l''^2} - \frac{abc}{ll'l''} - 4 = 0.$$

340. — *Même question qu'à l'exercice précédent n° 339, mais en supposant que* $A_1B_1C_1$ *soit le triangle podaire de* M.

On trouve :

$$a\sqrt{a^2 - l^2} + b\sqrt{b^2 - l'^2} + c\sqrt{c^2 - l''^2} = 0.$$

341. — *Lieu des points* M *tels que* MM_2 *soit vue de* I *sous un angle droit.*

On trouve aisément la cubique :

$$\Sigma x(y - z)^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0.$$

Elle est circonscrite au triangle de référence, coupe en outre les côtés en trois points situés sur la droite :

$$\Sigma x \cot g \frac{A}{2} = 0.$$

Elle n'a aucun point à l'intérieur du triangle ABC ; sauf I, qui est un point isolé.

AGRÉGATION

Concours de 1894.

Mathématiques élémentaires.

On considère un quadrilatère Q de sommets A, B, C, D, dont les diagonales se coupent en un point O, et les cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD et ODA. Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme P.

1° Le parallélogramme P étant donné, démontrer que tous les quadrilatères Q qui lui correspondent ont une surface constante et des diagonales de longueur constante.

2° Le parallélogramme P étant donné et le point O étant assujetti à décrire une droite Δ, prouver que les sommets du quadrilatère Q se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme P′ ; étudier la déformation de P′, quand Δ varie ; trouver les positions de la droite Δ pour lesquelles le parallélogramme P′ a une surface maximum.

3° Construire le quadrilatère Q, connaissant le parallélogramme P et soit deux angles de Q, soit les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$. Discuter.

4° On suppose que le quadrilatère Q soit inscriptible ; connaissant le parallélogramme P, trouver le lieu des sommets de Q et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. (Ces lieux sont des coniques.)

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

I. — On considère l'intégrale

$$V = \int_1^z \frac{(1 + z + z^2)\, dz}{z^2 (1 + z)\sqrt{a^2 + z^2}}$$

obtenue en allant du point (1) au point (z) par un chemin quelconque, la valeur initiale du radical pour $z = 1$ étant $+\sqrt{a^2+1}$, et a désignant un nombre *commensurable*.

1° Indiquer la nature des points singuliers de l'intégrale V;

2° Calculer les périodes de cette intégrale;

3° Montrer que, pour une infinité de valeurs de a, le nombre des périodes se réduit à un; indiquer la méthode à suivre pour obtenir l'expression générale de ces valeurs de a.

II. — Les variables complexes u et z étant liées par la relation

$$u^2 = 1 + z^6,$$

on considère l'intégrale

$$W = \int_1^z \frac{P(z, u)\,dz}{z^2 u}$$

dans laquelle P (z, u) désigne un polynôme entier en z et u.

Trouver la forme que doit avoir ce polynôme :

1° Pour que l'intégrale W soit finie en tous les points du plan des z à distance finie ou infinie, quelle que soit la détermination adoptée pour u, excepté au point $z = 0$, la valeur *correspondante* de u étant $+1$;

2° Pour que le résidu de W relatif à ce point ($z = 0$, $u = +1$) soit égal à $+1$.

3° Le polynôme P (z, u) satisfaisant aux conditions précédentes, quel est, en général, le nombre des périodes de l'intégrale W?

Mathématiques spéciales.

On considère toutes les hyperboles équilatères H qui déterminent sur l'axe Oy des segments variables ayant leur milieu au point O, et qui divisent harmoniquement un segment fixe AB porté par l'axe Ox perpendiculaire à l'axe Oy. On désignera par a, b les abscisses des points A et B.

1° Prouver qu'il y a dans le plan xOy une infinité de segments MM′ divisés harmoniquement par toutes les hyperboles H; les extrémités M, M′ de ces segments sont chacune le centre d'une hyperbole H réduite à deux droites.

2° Les extrémités M, M′ d'un même segment sont les foyers d'une conique tangente en O à l'axe Ox et tangente en des points variables aux parallèles à l'axe Oy issues des points A et B.

3° Trouver le lieu des milieux des segments MM′ et le lieu S de leurs extrémités M et M′.

4° Montrer que ce dernier lieu S est une courbe que l'on peut définir comme l'enveloppe de quatre familles de cercles qui touchent chacun la courbe en deux points. Trouver le lieu des centres de ces cercles et prouver que la courbe S peut se reproduire de trois manières par inversion.

5° Aux extrémités M, M′ de chaque segment divisé harmoniquement par les hyperboles H on mène les tangentes à courbe S; trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Composition de mécanique rationnelle.

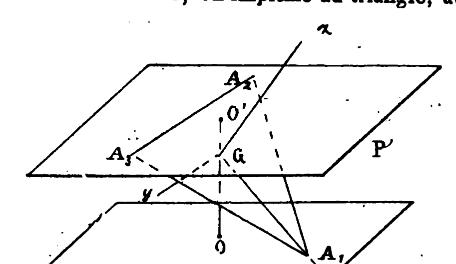
Une plaque homogène pesante infiniment mince, ayant la forme d'un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$, de côté a, repose par le sommet A_1 sur un plan horizontal P sur lequel elle glisse *avec frottement*, tandis que le côté

A_2A_3 glisse *sans frottement* sur un plan horizontal P′ placé au-dessus du premier.

Le triangle est percé en son centre de gravité G d'une ouverture infiniment petite, dans laquelle passe une tige verticale fixe OO′ parfaitement polie : la réaction de cette tige OO′ sur le triangle est donc une force horizontale appliquée en G.

Enfin, on suppose le plan du triangle incliné de 45° sur la verticale.

A l'instant $t = 0$, on imprime au triangle, autour de OO′, une vitesse angulaire ω_0, dans le sens positif des rotations.



On demande d'étudier le mouvement du système et de calculer les réactions normales des plans P et P′ sur le triangle.

1° Montrer que, si la vitesse angulaire initiale ω_0 a une certaine valeur μ, la réaction du plan P sur le sommet A_1 est *nulle*.

2° Indiquer ce qui arrive suivant que ω_0 est inférieur ou supérieur à μ, et suivant que le sommet A_1 peut ou non s'élever au-dessus du plan P.

Nota. — On appellera N_1 la réaction normale du plan P sur le sommet A_1 et on remarquera que les réactions normales du plan P′ sur le côté A_2A_3 peuvent se réduire à deux forces verticales N_2 et N_3 appliquées aux sommets A_2 et A_3. Si l'on prend pour axes liés au corps solide mobile un axe Gx dirigé suivant GA_1, un axe Gy parallèle à A_2A_3, et un axe Gz normal au plan du triangle et dirigé vers le haut, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relative au point G est de la forme

$$A(x^2 + y^2) + 2Az^2 = 1.$$

ÉCOLE CENTRALE

JUILLET 1894. — 1re SESSION

On donne dans un plan deux axes rectangulaires, $x'ox$, $y'oy$, un cercle C dont l'équation est $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, et une droite D dont l'équation est $x - d = 0$.

A un point quelconque F de la circonférence du cercle C on fait correspondre une conique Δ qui passe par l'origine des coordonnées, qui a un foyer au point F, et pour laquelle la directrice qui correspond à ce foyer F est la droite D.

Soit I le centre de cette conique Δ, A et A′ les sommets de son axe focal, A étant celui de ces deux sommets qui est le plus près de F, F′ son second foyer.

1° Trouver le lieu du point I quand le point F décrit la circonférence du cercle C. Ce lieu est conique; déterminer, par une construction géométrique, ses sommets et les points où elle rencontre la circonférence du cercle C.

2° Déterminer par une construction géométrique le point A et le point A′, sommets de l'axe focal de la conique Δ qui correspond à un point donné F de la circonférence du cercle C.

3° Touver le lieu du point A et lieu du point A′, quand le point F décrit la circonférence du cercle C.

4° Trouver le lieu décrit par le foyer F′ quand le foyer F décrit la circonférence du cercle C.

Nota. — On indiquera comment se modifie chacun des lieux demandés quand, laissant fixes les axes de coordonnées, et invariable le rayon r du cercle C, on fait croître d de o à $+\infty$.

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 187.)

40. — *D'un point* C *de la développée d'une parabole, on abaisse la normale double à la parabole dont le pied est en* A, *et la normale simple dont le pied est en* A′.

On projette le sommet O *de la parabole sur* AA′ *en* H; *en* A *on élève une perpendiculaire à* AA′ *jusqu'à sa rencontre en* L *avec* A′C; *en* A′ *on élève une perpendiculaire à* A′A *jusqu'à sa rencontre en* K *avec* AC. *Les deux droites* AA′ *et* KL *se rencontrent en* P, *et* KL *rencontre l'axe de la parabole en* I.

Montrer que lorsque le point C *se déplace sur la développée:*

1° La droite AA′ *enveloppe une parabole;*

2° Les lieux des points H, K, L *et* P *sont des cubiques;*

3° La cubique lieu du point K, *la parabole et sa développée ont deux points communs* B *et* B′, *pour lesquels la cubique et la développée ont même tangente; cette cubique partage l'aire comprise entre la parabole et la droite* BB′ *dans le rapport de* 2 *à* 3;

4° On a $LI = 2KI$;

5° Les droites OK *et* OH *sont également inclinées sur l'axe de la parabole;*

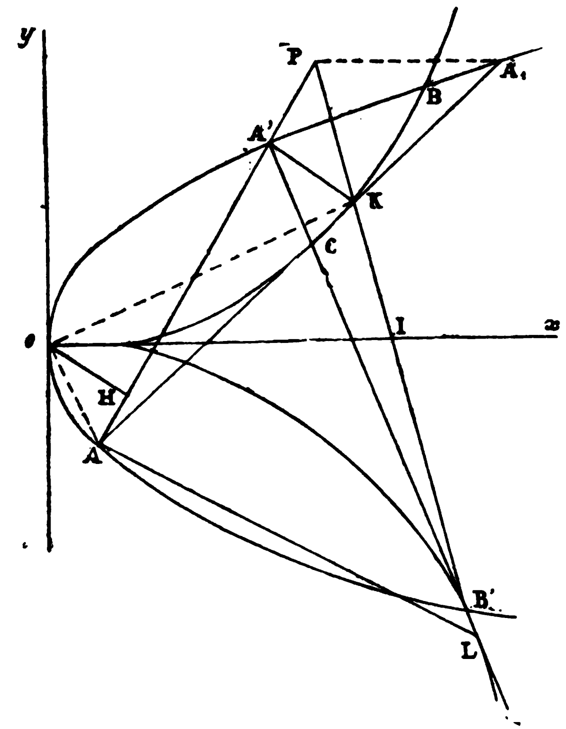
6° L'angle des deux droites AA′ *et* KL *est égal à l'angle que fait* AC *avec l'axe de la parabole;*

7° *On a* A'C = A'K *et* LC = LA.

8° *Les deux triangles* CAA' *et* CKL *ont même aire;*

9° *Trouver le minimum de l'aire du triangle* CAA'.

10° *Le lieu du milieu de la droite joignant les centres de gravité des triangles* CAA' *et* CKL *est une développée de parabole.*



11° *La droite* KL *est parallèle à la normale, à la parabole au second point d'intersection* A_1 *de la normale* AC *avec la parabole.*

On sait que si n est le coefficient angulaire de la normale double CA, on a pour les coordonnées du point A, C et A_1.

(1) $$x_A = \frac{pn^2}{2} \qquad y_A = -pn.$$

(2) $$x_C = p + \frac{3pn^2}{2}, \qquad y_C = pn^3.$$

(3) $$x_{A_1} = \frac{p(n^2+2)^2}{2n^2}, \qquad y_{A_1} = \frac{p(n^2+2)}{n}.$$

Soit maintenant t le coefficient angulaire de la normale simple CA'

L'équation aux coefficients angulaires des trois normales issues du point C est $pt^3 - 2t(x_C - p) + 2y_C = 0$,
ou, d'après (2) $t^3 - 3tn^2 + 2n^3 = 0$,
ou $(t - n)^2(t + 2n) = 0$.

La valeur double $t = n$ correspond à la normale double CA. Donc $t = -2n$ convient à la normale simple CA'. On trouve donc pour les coordonnées de A'

(4) $x_{A'} = 2pn^2 \qquad y_{A'} = 2pn.$

1° On trouve pour le coefficient angulaire de AA'

$$\mu_{AA'} = \frac{y_A - y_{A'}}{x_A - x_{A'}} = \frac{2}{n}.$$

Les deux droites OA et AA' sont donc également inclinées sur l'axe de la parabole.

Car $$\mu_{AO} = \frac{y_A}{x_A} = -\frac{2}{n}.$$

Il en résulte que le cercle circonscrit au triangle OAA' est tangent en A à la parabole : on sait en effet que le cercle circonscrit aux pieds des trois normales abaissées d'un point sur la parabole passe par le sommet de la parabole.

— L'équation de la droite AA' s'obtient sans difficulté ; on trouve

(5) $$2x - ny - 2pn^2 = 0$$

n étant le paramètre variable au second degré, il en résulte que cette droite enveloppe la parabole ayant pour équation

$$y^2 + 16px = 0.$$

2° *Lieu du point* H. — L'équation de OH est

(6) $$nx + 2y = 0.$$

En résolvant (5) et (6), par rapport à x et à y, on trouve pour les coordonnées du point H

(7) $$x_H = \frac{4pn^2}{n^2 + 4}, \qquad y_H = -\frac{2pn^3}{n^2 + 4}.$$

En éliminant n entre les deux équations (7) on trouve l'équation du lieu de H

$$y^2 = \frac{x^3}{4p - x}.$$

C'est une cissoïde droite. Ce résultat était à prévoir, car le point H a pour lieu la podaire du sommet de la parabole enveloppe de la droite AA'.

Lieu du point K. — Les équations de A'K et AC sont respectivement

$$y - 2pn = -\frac{n}{2}(x - 2pn^2),$$

$$y + pn = n\left(x - \frac{pn^2}{2}\right).$$

En résolvant ces deux équations par rapport à x et à y, on trouve pour les coordonnées du point K

(8) $$x_K = p(n^2 + 2), \qquad y_K = \frac{pn(n^2 + 2)}{2}.$$

En éliminant n entre ces deux équations (8), on trouve pour l'équation cartésienne du lieu de K

$$y^2 = \frac{x^2(x - 2p)}{4p}.$$

Lieu du point L. — Les équations de AL et de A'C sont respectivement :

$$y = pn = -\frac{n}{2}\left(\frac{x - pn^2}{2}\right),$$

$$y - 2pn = -2n(x - 2pn^2).$$

Ces équations donnent, pour les coordonnées du point L,

(9) $$x_L = 2p + \frac{5pn^2}{2}, \qquad y_L = -pn(n^2 + 2),$$

et, pour l'équation du lieu de L, la cubique unicursale d'équation

$$y^2 = \frac{4}{25}(x - 2p)(x + 3p).$$

Lieu du point P. — Le coefficient angulaire de KL est

(10) $$\mu_{KL} = \frac{y_K - y_L}{x_K - x_L} = -\frac{n^2 + 2}{n};$$

on trouve, par suite, pour l'équation de KL

(11) $$(n^2 + 2)x + ny = \frac{p}{2}(n^2 + 2)(3n^2 + 4).$$

En résolvant (5) et (11) par rapport à x et à y, on trouve les coordonnées du point P

(12) $$x_P = p + \frac{3pn^2}{2}, \qquad y_P = \frac{p(n^2 + 2)}{n};$$

et pour l'équation du lieu de P

$$y^2 = \frac{2p(x + 2p)^2}{3(x - p)}.$$

Remarque. — La comparaison des équations (3) et (12) montre que $y_{A_1} = y_P$.

La droite PA_1 est donc parallèle à l'axe de la parabole.

3° Nous avons trouvé pour la cubique lieu du point K l'équation

(13) $$y^2 = \frac{x^2(x - 2p)}{4p}.$$

Les équations de la parabole et de sa développée sont

(14) $$y^2 = 2px,$$

(15) $$y^2 = \frac{8(x - p)^3}{27p}.$$

Les coordonnées de l'un des points B d'intersection de la parabole et de sa développée sont

$$x_B = 4p \qquad y_B = 2p\sqrt{2}.$$

Il est facile de voir que ces coordonnées satisfont à l'équation (13),

— Si on forme les expressions $\frac{dy}{dx}$ pour (13) et (15), et si on y fait $x = 4p$, on trouve la valeur commune

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2}.$$

Donc, les courbes (13) et (15) ont la même tangente aux points communs B et B'. S est le point de rebroussement de la développée, et S' le sommet de la cubique (13).

Aire de la cubique (13). — On a, en posant $x - 2p = u^2$:

$$\int y dx = \frac{1}{\sqrt{p}}\int (2pu^2 + u^4)du = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(2p\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}\right),$$

de sorte que si U désigne l'aire S'BB', on a

$$U = \frac{64p^2\sqrt{2}}{15}.$$

Si P désigne l'aire du segment parabolique BOB', on a aussi

$$P = \frac{32p^2\sqrt{2}}{3}.$$

D'où l'on conclut

$$\frac{P - U}{U} = \frac{3}{2}.$$

On trouve de même en désignant par V l'aire SBB' comprise entre la développée et la corde BB'

$$V = \frac{24p^2\sqrt{2}}{5}.$$

D'où

$$\frac{P - V}{V} = \frac{11}{9}.$$

4° Des formules (8) et (9), on déduit $y_L = -2y_K$.

Donc, on a bien

$$LI = 2KI.$$

5° Les coefficients angulaires de OK et OH sont

$$\mu_{OK} = \frac{y_K}{x_K} = \frac{n}{2},$$

$$\mu_{OH} = \frac{y_H}{x_H} = -\frac{n}{2}.$$

Donc OK et OA sont également inclinées sur l'axe de la parabole.

Remarque. — On voit aussi que OA et OK sont perpendiculaires. En effet, on a

$$\mu_{OA} = \frac{y_A}{x_A} = -\frac{2}{n},$$

et

$$\mu_{OA} \cdot \mu_{OK} = -1.$$

6° On a

$$\mu_{AA'} = \frac{2}{n},$$

$$\mu_{KL} = -\frac{n^2+2}{n}.$$

Si V désigne l'angle de AA' et de KL, il vient

$$\operatorname{tg} V = \frac{\mu_{AA} - \mu_{KL}}{1 + \mu_{AA'} \times \mu_{KL}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{n^2+2}{n}}{1 - \frac{2(n^2+2)}{n^2}} = -n.$$

Donc V est égal à l'angle que la normale AC fait avec l'axe de la parabole.

7° On a

$$\overline{A'C}^2 = (x_{A'} - x_C)^2 + (y_{A'} - y_C)^2,$$

$$\overline{A'K}^2 = (x_{A'} - x_K)^2 + (y_{A'} - y_K)^2.$$

D'après les formules (2), (4) et (8), on trouve que

$$A'C = A'K = \frac{p(n^2-2)}{2}\sqrt{n^2+4}.$$

On trouve aussi que

$$LC = LA = p(n^2+1)\sqrt{n^2+4}.$$

8° — Le double 2S de l'aire du triangle CAA' a pour expression

$$2S = \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_{A'} & y_{A'} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p + \frac{3pn^2}{2} & pn^3 & 1 \\ \frac{pn^2}{2} & -pn & 1 \\ 2pn^2 & 2pn & 1 \end{vmatrix},$$

d'où, en réduisant,

$$(16) \qquad S = \frac{3p^2n}{4}(n^4 - n^2 - 2).$$

Le double 2S' de l'aire du triangle CKL a, de même, pour expression

$$2S' = \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_K & y_K & 1 \\ x_L & y_L & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p + \frac{3pn^2}{2} & pn^3 & 1 \\ p(n^2+2) & \frac{pn(n^2+2)}{2} & 1 \\ 2p + \frac{5pn^2}{2} & -pn(n^2+2) & 1 \end{vmatrix},$$

et on trouve, toutes réductions faites,

$$S' = \frac{3p^2n}{4}(n^4 - n^2 - 2).$$

Donc $S = S'$.

Ce résultat se voit aussi géométriquement. En effet, les triangles semblables A'KC et LAC donnent

$$\frac{A'C}{CK} = \frac{CL}{CA},$$

ou

$$CA.CA' = CK.CL,$$

ou

$$CA.CA' \sin \widehat{ACA'} = CK.CL \sin \widehat{KCL}$$

ce qui démontre la proposition.

9° En égalant à zéro la dérivée, par rapport à n, de l'expression (16), on trouve

$$5n^4 - 3n^2 - 2 = 0,$$

ou

$$(n^2 - 1)(5n^2 + 2) = 0.$$

Les valeurs réelles sont donc $n = \pm 1$, et l'aire minima a pour expression $\frac{3p^2}{2}$.

Cette normale remarquable, inclinée à 45° sur l'axe de la parabole, s'est présentée, précédemment, au cours de l'exercice 38.

10° — Les coordonnées X, Y du centre de gravité du triangle CAA' sont

$$3X = x_C + x_A + x_{A'} = p + 4pn^2,$$
$$3Y = y_C + y_A + y_{A'} = pn + pn^3.$$

On trouve de même pour les coordonnées X_1, Y_1 du centre de gravité du triangle CKL

$$3X_1 = x_C + x_K + x_L = 5p + 5pn^2,$$
$$3Y_1 = y_C + y_K + y_L = -pn + \frac{pn^3}{2}.$$

Si (x, y) sont les coordonnées du milieu de la distance des deux centres de gravité, on a

$$2x = X + X_1 = 2p + 3pn^2,$$
$$2y = Y + Y_1 = \frac{pn^3}{2}.$$

L'élimination de n entre ces deux dernières relations conduit à l'équation

$$y^2 = \frac{(x-p)^3}{54p},$$

C'est donc une développée de parabole. — On peut observer que

$$x = x_C \qquad y = \frac{y_C}{4}.$$

11° — Si l'on compare les relations (8) et (10), on en déduit

$$\mu_{KL} = -\frac{y_{A_1}}{p}.$$

Le second membre est donc bien le coefficient angulaire de la normale à la parabole au point A_1 : ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque. — On peut encore ajouter aux nombreuses propriétés précédentes que la droite PC est perpendiculaire à l'axe de la parabole.

QUESTION 362

Déterminer un triangle, connaissant les distances α, β, γ *de l'orthocentre au sommet.* (A. Droz-Farny.)

On trouvera, comme nous l'a fait remarquer un de nos correspondants, une solution dans les *Mélanges* de Catalan. Il ramène *(loc. cit.)* le problème à la construction d'un quadrilatère inscriptible dont trois côtés sont égaux aux longueurs données, le quatrième étant égal au diamètre 2R de la circonférence circonscrite.

Le problème n'est pas *quadratique;* sa solution dépend de celle de l'équation du troisième degré

$$4R^3 - R(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \alpha\beta\gamma = 0;$$

M. Vazou, professeur au collège de Falaise, nous a adressé une solution dans laquelle il discute cette équation, et il conclut, de cette discussion, que le lecteur rétablira facilement, que le problème est toujours possible et qu'il admet une seule solution.

QUESTIONS PROPOSÉES

401. — Construire une conique passant par cinq points donnés, dont deux imaginaires conjugués déterminés par l'intersection d'un cercle et d'une droite qui ne se rencontrent pas.

— Même question, en supposant quatre points imaginaires, déterminés au moyen de deux cercles et de deux droites qui ne les rencontrent pas. *(Delens.)*

402. — Démontrer la formule :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f(x) - \frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} + 1\right)\frac{\Delta^2 f(x)}{1.2}$$

$$- \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h} + 1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h} + m - 1\right)\frac{\Delta^m f(x)}{m\,!},$$

$f(x)$ étant un polynôme entier en x de degré m, et Δ, Δ^2, ... désignant les différences successives de ce polynôme qui correspondent à des valeurs de x en progression arithmétique de raison h. *(Delens.)*

403. — Démontrer les formules :

$$C_p^q - \gamma_p^1 C_p^{q-1} + \gamma_p^2 C_p^{q-2} - \ldots \times (-1)^q \gamma_p^q = 0,$$

et

$$C_p^q - \gamma_{p+\alpha}^1 C_p^{q-1} + \gamma_{p+\alpha}^2 C_p^{q-2} - \ldots + (-1)^q \gamma_{p+\alpha}^q = (-1)^q \gamma_\alpha^q,$$

C_p^q et γ_p^q désignant respectivement les nombres des combinaisons simples et complètes de p objets q à q. *(Delens.)*

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16982-8-94.

UN THÉORÈME SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE

Par M. **Cazamian.**

Voici un théorème très simple, et qui établit une analogie intéressante entre le cercle et l'hyperbole équilatère. A cause de sa simplicité même, il est bien probable qu'il a déjà été remarqué.

Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un point quelconque du plan et à sa polaire est constant et égal au carré du demi-axe.

La vérification analytique est immédiate, en prenant pour équation de l'hyperbole $x^2 - y^2 - a^2 = 0$. Géométriquement, le théorème résulte de cette proposition :

La polaire réciproque d'un cercle concentrique à une hyperbole équilatère, par rapport à l'hyperbole, est un autre cercle concentrique. Les rayons de ces deux cercles vérifient la relation $RR' = a^2$, a *désignant le demi-axe de l'hyperbole.*

En effet, en appelant I et J les points cycliques, on sait que le triangle OIJ est conjugué à l'hyperbole équilatère. Les tangentes menées du centre O de l'hyperbole à un cercle concentrique C sont les droites OI, OJ, qui ont respectivement pour pôles, par rapport à l'hyperbole, les points J et I. Il en résulte que la polaire réciproque du cercle C, en prenant pour conique directrice l'hyperbole équilatère, est une conique concentrique passant par les points I et J, c'est-à-dire un cercle C′.

De plus, si l'on appelle R le rayon OD du cercle C, R′ le rayon OE du cercle C′, on a, sur l'axe transverse, la relation:

$$OD \times OE = \overline{OA}^2,$$

A étant le sommet de l'hyperbole équilatère,

ou $$RR' = a^2.$$

Applications. — *Construction d'une hyperbole équilatère dont*

on connaît le centre, un point quelconque du plan et sa polaire, ou le centre, une tangente et son point de contact.

Corollaires. — 1° *Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un point de la courbe et à la tangente en ce point est égal au carré du demi-axe.*

2° *La podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre coïncide avec sa figure inverse relativement au même point, si l'on prend le demi-axe pour module d'inversion* (théorème connu).

3° *Le produit des distances du centre d'une hyperbole équilatère à un sommet et au côté opposé d'un triangle autopolaire est le même pour les trois sommets, et est égal au carré du demi-axe.*

4° *Le lieu des points* M *tels qu'en les joignant aux trois sommets d'un triangle* ABC, *et en menant sur les côtés* BC, AC, AC, *les perpendiculaires* MP, MP′, MP″, *on ait la relation*

$$MA \times MP = MB \times MP' = MC \times MP''$$

est le cercle circonscrit au triangle.

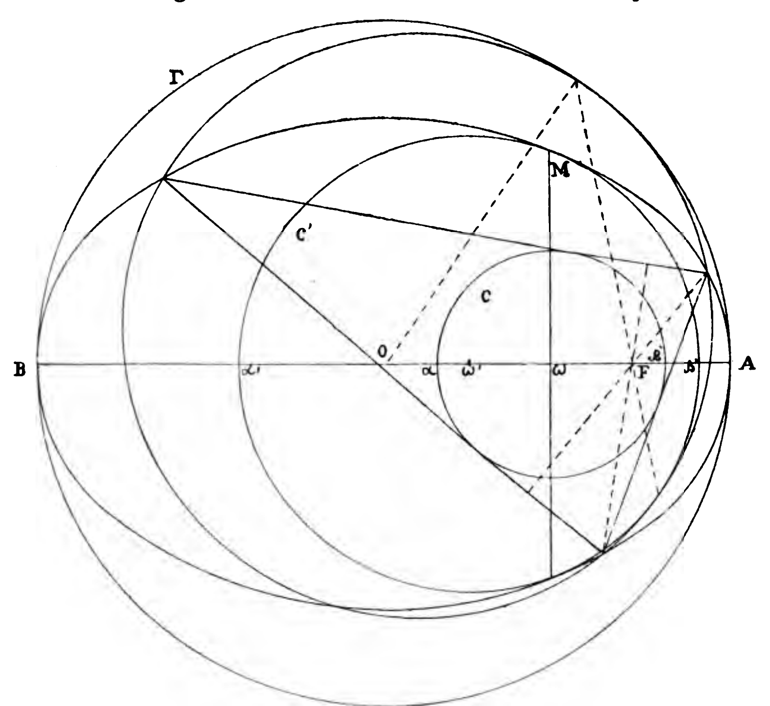
THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE

Par M. **Michel**, élève à l'École normale

Il existe une infinité de triangles inscrits dans une ellipse qui ont pour centre des hauteurs un foyer de la conique. L'enveloppe de leurs côtés est un cercle et leurs cercles circonscrits sont tangents au cercle homographique.

Considérons le cône capable d'un trièdre trirectangle inscrit qui a pour base l'ellipse et dont le sommet S se projette au

foyer F sur le plan de l'ellipse. On peut lui inscrire une infinité de trièdres trirectangles et par suite, en coupant par le plan de la conique, on peut inscrire à la conique une infinité de triangles ABC, dont l'orthocentre est le foyer F.



Soit A′ le pied de la hauteur issue du point A sur le côté opposé BC. On a la relation

$$FA.FA' = -\overline{FS}^2.$$

L'enveloppe du côté BC est donc la polaire réciproque de l'ellipse par rapport au cercle de centre F et de rayon

$$FS\sqrt{-1}.$$

Cette enveloppe est un cercle (C).

Considérons maintenant le cercle circonscrit au triangle ABC. La puissance de l'orthocentre par rapport à ce cercle est, comme on sait,

$$2FA.FA' \quad \text{ou} \quad -2\overline{FS}^2.$$

Cette puissance étant constante, le cercle circonscrit est orthogonal à un cercle fixe qui a pour centre le point F et pour rayon

$$FS\sqrt{-2}.$$

D'ailleurs, d'après le théorème de Feuerbach, le cercle des neuf points est tangent au cercle fixe (C). Donc le cercle circonscrit qui est homothétique dans le rapport 2 : 1 au cercle des neuf points par rapport à l'orthocentre F est tangent à un cercle fixe (C′), qui est homothétique dans le rapport 2 : 1 au cercle C par rapport à F.

Transformons par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôle le point F et pour puissance $-2\overline{FS}^2$. Le cercle circonscrit au triangle ABC, d'après ce qui précède, se transforme en lui-même, et il est par suite tangent au cercle (Γ), transformé du cercle C′. Le point de contact est évidemment en ligne droite avec le point de Feuerbach du triangle ABC.

Je dis que le cercle (Γ) est le cercle homographique de l'ellipse. Soient α et β les points d'intersection du cercle C avec l'axe de l'ellipse. A et B étant les sommets de la conique, on a

$$FA.F\alpha = FB.F\beta = -\overline{FS}^2.$$

Si α' et β' sont les points d'intersection du cercle C′ avec l'axe, on a

$$F\alpha' = 2F\alpha, \qquad \text{et} \qquad F\beta' = 2F\beta.$$

Par suite, $FA.F\alpha' = FB.F\beta' = -2\overline{FS}^2$,

ce qui démontre le théorème.

Proposons-nous de calculer les éléments qui permettent de fixer la position du cercle C. En vertu de ce théorème connu, que le cercle de Monge du cercle inscrit à un triangle est orthogonal au cercle conjugué, nous avons la relation

$$2\overline{\omega\alpha}^2 = \overline{\omega F}^2 + FA.F\alpha,$$

ω étant le centre du cercle.

Mais $\qquad FA.F\alpha = FB.F\beta,$

c'est-à-dire $\qquad (a - c)F\alpha = (a + c)F\beta,$

donc $\qquad a.\omega F = c.\omega\alpha.$

Par conséquent,

$$FA.F\alpha = (a - c)(\omega F + \omega\alpha) = \omega F.\frac{b^2}{c}.$$

Donc $\omega F . \frac{b^2}{c} = 2\overline{\omega\alpha}^2 - \overline{\omega F}^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} . \overline{\omega F}^2.$

Enfin $$\omega F = \frac{b^2 c}{a^2 + b^2}.$$

Le rayon du cercle est
$$\omega\alpha = \frac{b^2 a}{a^2 + b^2}.$$

Je dis que le cercle (C′) est bitangent à la conique aux points de rencontre avec la perpendiculaire à l'axe menée par ω.

Soit M un point d'intersection de cette droite avec la conique. Pour montrer qu'il est sur le cercle, il suffit de faire voir que l'on a
$$-\overline{\omega M}^2 = \omega\alpha' . \omega\beta' = \frac{b^2}{a^2} . \omega A . \omega B.$$

Or, $\omega\alpha' . \omega\beta'$ est la puissance du point ω par rapport au cercle C′; ω' étant le centre de ce cercle,
$$\omega\alpha' . \omega\beta' = \overline{\omega'\omega}^2 - \overline{\omega'\alpha'}^2 = \overline{\omega F}^2 - 4\overline{\omega\alpha}^2 = \frac{b^4(c^2 - 4a^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

$\omega A . \omega B$ est la puissance du point ω par rapport au cercle homographique.

Donc $$\omega A . \omega B = \overline{\omega O}^2 - a^2.$$

Mais $$\omega O = c - \omega F = \frac{a^2 c}{a^2 + b^2}.$$

Donc $$\frac{b^2}{a^2} . \omega A . \omega B = \frac{b^2 c^2 a^2 - b^2(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Et nous avons bien
$$b^2(c^2 - 4a^2) = a^2 c^2 - (a^2 + b^2)^2.$$

Je dis maintenant que la normale en M à l'ellipse passe par ω'. Pour le montrer, il suffit de faire voir que $O\omega'$ et $O\omega$ sont dans le rapport $\frac{c}{a}$.

Or, $$O\omega' = c - 2\omega F = \frac{c^3}{a^2 + b^2}.$$

D'autre part, $$O\omega = \frac{ca^2}{a^2 + b^2}.$$

Donc $$\frac{O\omega'}{O\omega} = \frac{c}{a}.$$

Le cercle C′ est donc bitangent à la conique.

Des théorèmes précédents résulte l'énoncé suivant :

Étant donné un triangle ABC, *il existe quatre coniques circonscrites au triangle, ayant leur foyer au centre des hauteurs, qui sont les polaires réciproques des cercles inscrit et ex-inscrits par rapport au cercle conjugué.*

Les cercles homographiques de ces coniques sont tangents au cercle circonscrit en quatre points qui sont sur les droites qui joignent le point de concours des hauteurs aux points de Feuerbach.

Elles sont bitangentes aux cercles homothétiques doubles des cercles inscrit et ex-inscrits par rapport au point de concours des hauteurs ; les cordes de contact passent par les centres des cercles inscrit et exinscrits.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE

DE TRANSFORMATION

Par M. **G. Leinekugel**, élève-ingénieur hydrographe.

(*Suite*, voir page 169.)

VI. — Démontrons quelques propriétés relatives à deux courbes transformées l'une de l'autre (C) et (Γ).

I. Si la courbe (C) est d'ordre m et de classe c, de chacun des points A, B, C, qui sont des points d'ordre de multiplicité m de (Γ), on peut mener m autres tangentes à (Γ) qui la touchent en des points différents des sommets du triangle ABC. Ces m tangentes sont pour chacun des sommets B, C les m droites qui joignent ces points aux points de rencontre de la courbe (C) avec les côtés AC, AB. Pour le point A ce sont les m droites conjuguées harmoniques par rapport à AC, AB des droites joignant ce sommet aux points de rencontre de (C) et de BC.

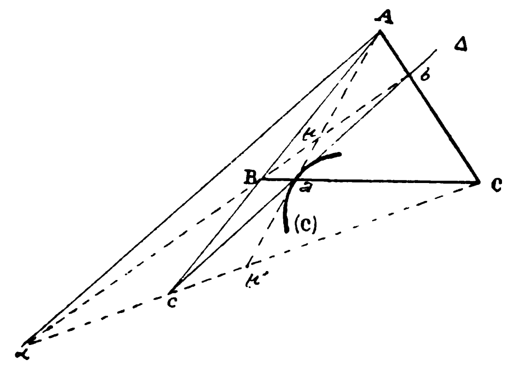
Il suffit d'appliquer la construction générale donnée précédemment pour mettre en évidence ce que nous venons de dire.

A la tangente Aa, au point a, à (C) correspond à la tangente A au point a à (C) correspond le point α de (Γ). La tangente en ce point est la conjuguée harmonique de αa

par rapport à αb, αc. Cette droite est $A\alpha$, puisque dans le quadrilatère $ABab$ les deux diagonales Cc, Bb déterminent sur la troisième une division $(A\alpha\mu\mu')$ harmonique.

La même construction appliquée à un point b (ou c) de rencontre de (C) avec AC (ou AB) montre que la droite Bc (ou Cc) est une tangente à (Γ). Si la courbe (C) est tangente en ce point b (ou c) à AC (ou AB), la courbe (Γ) passe par ce point.

Dans le cas particulier où la droite Δ considérée précédemment passe par le point A, le point α vient également se confondre avec ce point. Cette droite qui est tangente à (Γ) en ce point est alors une tangente inflexionnelle.



II. Cas particulier où la courbe (C) est tangente à BC en un point a.

Nous avons montré que la courbe (Γ) est alors d'ordre $2c - 1$, et que les deux points BC, sont d'ordre $(c - 1)$ et A d'ordre c. D'après ce qui précède, la courbe (Γ) aura, outre les points B, C sur cette droite, un troisième point a', conjugué harmonique de a par rapport à B, C. Nous allons donner la construction de la tangente en ce point a'. Nous pouvons évidemment autour du point a remplacer la courbe (C) par la conique (C′) qui a le contact maximum en ce point a avec la courbe (C). Cette conique (C′) aura pour transformée une cubique circonscrite au triangle admettant le point A comme point double. Les tangentes en B, C, sont celles que l'on peut mener de ces points à (C′) et en A les conjuguées harmoniques de ces tangentes à (C′) par rapport aux côtés AB, AC. On déduit de là cette propriété des cubiques à point double :

On prend deux points sur une cubique à point double A, *on joint*

ces deux points B, C *au point* A. *Les droites conjuguées harmoniques des tangentes au point double à cette cubique par rapport aux droites* AC, AB *sont avec le côté* BC *et les tangentes en* B, C *à cette courbe, cinq droites tangentes à une conique* (C′) *qui touche le côté* BC *au point* a, *conjugué harmonique du troisième point de rencontre de* BC *avec la courbe, par rapport aux points* B, C.

Il résulte de là qu'il suffit de considérer le triangle ABa' et la conique (C″) tangente à BC au point c' tel que (Ba'CC′) = — 1 et qui touche les tangentes au point double, et la tangente à la conique (C′) menée du point B, qui est la tangente à la cubique en ce point. La deuxième tangente menée de a' à cette conique (C″) qui se construit aisément (par un hexagone de Brianchon) est la tangente cherchée à la courbe (Γ).

III. Si on se donne une courbe (Γ) d'ordre n et de classe p, quelle est la courbe (C) dont elle est la transformée?

Ce qui précède nous permet de résoudre cette question. La courbe (C) sera évidemment de classe $2n$ et touchera chacun des côtés AC, AB aux n points de rencontre de (Γ) et de ces droites. Cette courbe (C) touchera de plus le côté BC, aux n points conjugués harmoniques des points de rencontre de (C) avec cette droite par rapport aux points BC.

Dans le cas où (Γ) est une conique S du plan, la courbe (C) est une courbe de quatrième classe, admettant chacun des côtés du triangle ABC comme tangente double. D'après ce que nous avons dit relativement aux quartiques admettant trois points doubles, nous pouvons conclure que si : *une courbe de quatrième classe admet trois tangentes doubles, les six points de contact de ces droites avec la courbe appartiennent à une même conique.*

IV. De ce qui précède (I) on peut conclure, dans le cas où (C) est une conique, cette propriété remarquable des quartiques admettant trois points doubles.

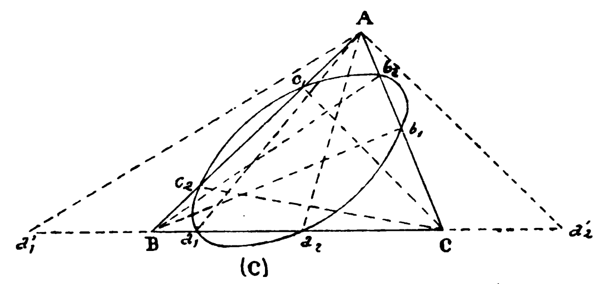
On considère une quartique (Γ) *admettant trois points doubles, de chacun de ces points partent deux tangentes à cette courbe qui la touchent en des points différents de ces points doubles; les six droites ainsi obtenues sont tangentes à une même conique.*

En effet, les six droites Aa_1, Aa_2; Bb_1. Bb_2; Cc_1 et Cc_2 sont tangentes à une même conique. Si l'on prend les droites Aa'_1, Aa'_2 telles que

$$(a_1a'_1BC) = (a_2a'_2BC) = -1,$$

les six droites Aa'_1, Aa'_2; Bb_1, Bb_2; Cc_1 et Cc_2 sont tangentes à une même conique également. Il suffit de répéter ici le raisonnement qui nous a permis de conclure que les six tangentes aux trois points doubles d'une quartique, en ces points, étaient tangentes à une même conique.

Ces propriétés relatives aux quartiques à trois points doubles peuvent évidemment s'énoncer de la façon suivante :



Les six tangentes aux trois points doubles d'une quartique rencontrent les côtés du triangle formé par ces points, en six points appartenant à une même conique. Il en est de même des six points de rencontre de ces côtés avec les six autres tangentes menées de ces points doubles et ne touchant la quartique qu'en des points différents de ces points doubles.

(A suivre.)

ESSAI HISTORIQUE

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par **M. Aubry.**

Le vrai caractère de l'algèbre ne réside pas dans l'emploi de symboles abréviatifs, mais dans les idées que ces symboles représentent. Aussi on peut faire remonter l'origine de l'algèbre jusqu'aux premiers géomètres grecs. Leur algèbre, toute discursive, consistait dans l'emploi habile des pro-

portions et la connaissance de quelques produits, comme $a(b + c + d + \ldots)$, $(a + b)(c + d)$, $(a + b)^2$, etc... Elle constituait un ensemble de lemmes destinés à démontrer certaines propositions de la géométrie. Celle-ci, en retour, fournissait de ces lemmes des énoncés mnémoniques et des démonstrations intuitives. Par exemple, cette proposition d'Euclide (*) : *Si on divise une droite en deux parties égales et en deux parties inégales, le rectangle des deux parties inégales ajouté au carré de la partie centrale est équivalent au carré de l'une des parties égales*, peut être considérée comme la traduction géométrique de l'identité

$$ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2.$$

Les Indiens, et après eux, les Chaldéens et les Égyptiens, paraissent avoir de bonne heure étudié les propriétés des nombres entiers, mais on ne peut faire que des conjectures à cet égard. Toutefois, il est certain qu'il faut attribuer une origine indienne à la théorie des proportions géométrique et harmonique, ainsi qu'à la considération des puissances et des fonctions entières.

La théorie des proportions a été appliquée aux grandeurs continues par Thalès (— 640), qui l'introduisit dans la géométrie par sa découverte des propriétés des triangles semblables.

Pythagore (— 540) paraît avoir imaginé les nombres figurés et les nombres polygones (*), les progressions arith-

---

(*) Voici quelques-uns des théorèmes attribués à Pythagore : les figures 1, 2, 3 et 4 indiquent les démonstrations probables.

L'addition des nombres impairs successifs donne la suite des nombres carrés (*fig. 1*).

La somme de deux triangulaires successifs est un carré (*fig. 2*).

Fig. 1. *Fig. 2.* *Fig. 3.* *Fig. 4.*

Tout nombre oblong (produit de deux nombres consécutifs) *est double d'un triangulaire* (*fig. 3*).

Il en est de même de tout nombre promèque (somme d'un nombre et de son carré) (*fig. 4*).

métique et géométrique, cultivé la théorie de la proportion harmonique à laquelle il a donné son nom (*), remarqué l'irrationnalité du rapport de la diagonale du carré au côté (**), enfin commencé les recherches de triangles rectangles en nombres entiers (***).

Les disciples de Pythagore s'occupèrent beaucoup également de la théorie des nombres, mais sans arriver le plus souvent à autre chose qu'à des rêveries sur des propriétés mystérieuses de certains nombres (****).

Le premier emploi connu de raisonnements algébriques réside dans cette remarque d'Hippocrate de Chio (—450), que le problème de la duplication du cube revient à l'insertion de deux moyennes proportionnelles.

Platon et ses disciples durent être habiles dans l'art des

(*) Remarquant l'accord parfait produit par des marteaux de forgerons, l'idée lui vint de les peser : il trouva que les poids étaient dans les rapports des nombres 6, 4, 3, c'est-à-dire en proportion harmonique. C'est l'origine de son célèbre système musical, et des propriétés étranges qu'il attribue aux nombres.

(**) Pythagore est l'auteur de la démonstration, tout au moins de la relation qui lie les trois côtés d'un triangle rectangle. Le théorème luimême est attribué aux Indiens.

(***) Sa méthode s'interprète par la formule

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2.$$

Plus tard, Platon a donné la suivante

$$a^2 + \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]^2.$$

La règle générale $(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$ donnée incidemment par Euclide (*note I*) paraît avoir servi de thème à Diophante.

(****) L'unité étant indivisible et immuable, elle représentait Dieu. Le nombre 6 s'appelait mariage, comme étant le premier nombre qui se compose de ses facteurs et qui est en même temps le produit du premier nombre pair par le premier impair : les nombres impairs étant mâles et les pairs femelles pour une raison facile à deviner. Le nombre 7 était appelé Minerve, comme étant le seul nombre de la décade qui n'en produise aucun autre et qui ne soit produit par aucun : les nombres 3 et 7 ont toujours joui, du reste, d'une grande faveur, ainsi que leurs multiples. Le nombre 10 était le plus parfait comme somme des quatre premiers nombres, lesquels donnent la proportion harmonique $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Le nombre 17 était en aversion comme séparant les nombres 16 et 18 dont les surfaces sont représentées par les mêmes nombres que les périmètres; la justice est le produit de deux nombres impairs; etc.

transformations analytiques, témoin leurs solutions du problème de la duplication du cube et leurs premières spéculations sur les sections du cône; mais, comme on ne possède plus leurs écrits, on en est réduit à des conjectures.

On voit pour la première fois un traité d'algèbre dans certains livres des Στοιχεῖα d'Euclide (—300). Il y traite des égalités du genre de celle rappelée plus haut, des proportions, des irrationnelles, etc. Il enseigne entre autres choses à trouver des nombres parfaits et à sommer les progressions géométriques finies, et même la progression infinie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ Dans un autre de ses ouvrages, il résout implicitement certaines équations du second degré, par exemple, en indiquant la manière dont est déterminé un rectangle dont on connaît la surface et le périmètre. Il s'élève même à des équations bicarrées.

Les écrits d'Archimède (— 250) et d'Apollonius (— 200) contiennent de véritables prodiges d'analyse. Réservant pour plus tard l'exposition de certains de leurs travaux, touchant d'autres parties de la science, nous nous contenterons de dire ici qu'Archimède a posé la première équation cubique en demandant de *diviser par un plan une sphère dans le rapport de deux droites données* (*), et qu'Apollonius paraît avoir entrepris ses propres recherches sur les coniques dans le but de cultiver la théorie des équations de ce genre.

On n'a à citer ensuite dans l'histoire qui nous occupe que les travaux de Nicomaque et de Théon de Smyrne. On voit dans le premier différents problèmes conduisant à des équations déterminées et indéterminées du premier degré (**).

(À suivre.)

(*) Ce problème a joui d'une certaine célébrité. Il a été résolu d'abord par Dioclès à l'aide d'intersections de coniques, puis par Huyghens en le ramenant à la trisection d'un arc donné. Les trois racines étant réelles et l'une d'elles seulement convenant à la question, il y avait lieu de se demander à quoi répondaient les deux autres. Poinsot a résolu cette difficulté en faisant remarquer que le partage de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes conduit à la même équation et donne précisément les deux solutions dont on vient de parler.

(**) Nous citerons encore ce théorème de Nicomaque : *Groupons la série des nombres impairs en groupes de* 1, 2, 3, 4, ... *termes : la somme de*

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 187.)

41. — *D'un point* C *de la développée d'une parabole de sommet* O *on abaisse la normale double à la parabole dont le pied est* A *et la normale simple dont le pied est* A'. *Si le point* C *se déplace sur la développée, montrer que:*

1° Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OAA' *enveloppe une développée de parabole;*

2° Le cercle décrit sur AA' *comme diamètre rencontre la parabole en deux autres points* Q *et* Q' : *la droite* QQ' *enveloppe une parabole;*

3° Le cercle circonscrit au triangle CAC' *rencontre la parabole en deux autres points* U *et* U'; *la droite* UU' *enveloppe une parabole;*

4° Les deux droites élevées en A *et* A' *perpendiculairement à* AA' *enveloppent chacune une développée de parabole;*

5° Chacune des trois hauteurs du triangle CAA' *enveloppe une développée de parabole ou une parabole.*

On arrive aux résultats suivants :

1° $$y^2 = \frac{4(x-p)^3}{27p}.$$

2° $$y^2 + 16p(x+2p) = 0.$$

3° $$y^2 - 16p(x+p) = 0$$

4° $$y^2 = \frac{2(x+2p)^3}{27p},$$

$$y^2 = \frac{(x-4p)^3}{54p}.$$

5° $$y^2 = \frac{2(x-p)^3}{189p}.$$

pour la hauteur issue de C ;

et $$y^2 + 16px = 0,$$

pour la hauteur aboutissant en A';

enfin, $$2y^2 + 5px = 0,$$

pour la troisième hauteur, celle qui passe en A.

---

chaque groupe est un cube. Rallier des Ourmes *(Encyclopédie méthodique)* a fait voir qu'on peut obtenir les puissances de tous les nombres entiers par la somme d'une certaine quantité de nombres impairs consécutifs. A l'imitation de M. Mansion, qui a retrouvé cette extension, nous donnerons les exemples suivants qui tiennent lieu de démonstration

$$25 + 27 + 29 = 27.3 = 3^4, \qquad 61 + 63 + 65 + 67 = 64.4 = 4^4.$$

Remarque. — On voit encore que :
Le lieu du point de rencontre des hauteurs du triangle CAA′ est une parabole.
En résolvant par rapport à x et à y les équations des deux dernières hauteurs, on trouve pour les coordonnées de l'orthocentre

$$x = \frac{7pn^2}{2} \qquad y = \frac{pn}{2},$$

Le lieu de l'orthocentre est donc la parabole ayant pour équation

$$y^2 = \frac{px}{14}.$$

On peut encore remarquer que la courbe du paragraphe 1° est aussi le lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole des normales formant un faisceau harmonique (la normale a l'infini faisant parti du faisceau).

42. — *En un point* A *d'une parabole on mène la normale dont le point de contact avec la développée est en* C *et qui rencontre la développée en un autre point* C′. *De* C *on abaisse la normale simple à la parabole, dont le pied est en* A′. *Montrer que la tangente à la développée en* C′ *est perpendiculaire à la droite* AA′.

Nous avons vu, d'après l'exercice 40, que, si n est le coefficient angulaire de AC, celui de A′C est $-2n$. Par conséquent, celui de la tangente en C′ à la développée est $-\frac{n}{2}$. Comme le coefficient angulaire de la droite AA′ est $\frac{2}{n}$, il en résulte donc que la tangente en C′ est perpendiculaire à AA′.

43. — *La tangente à la développée d'une parabole à l'un des points d'intersection réels de la parabole et de la développée est aussi normale à la développée.*

C'est une conséquence de la propriété de l'exercice 42, en supposant que le point C est un des points d'intersection de la parabole avec sa développée.

44. — *Si d'un point* P *situé dans le plan d'une parabole* (Q) *on abaisse les normales à la parabole dont les pieds sont* A, B, C, *on sait que ces trois points et le sommet* O *sont sur une même circonférence* (Γ). *Il existe aussi une hyperbole équilatère* (H) *passant par* A, B, C, O, *et une parabole* (Q′) *autre que* (Q) *passant par les mêmes points. Montrer que :*

1° Le lieu des points P *tels que le diamètre de* (Γ) *soit constant est une ellipse ;*

2° Le lieu des points P *tels que l'axe de* (H) *soit constant est une hyperbole ;*

3° *Le lieu des points* P *tels que le paramètre de* (Q′) *soit constant est une droite;*

4° *Le lieu des points* P *tels que cinq fois le carré du diamètre de* (Γ) *diminué de trois fois le carré de l'axe de* (H) *soit constant est un cercle;*

5° *Le lieu des points* P *tels que le diamètre de* (Γ) *et l'axe de* (H) *soient égaux est uue parabole;*

6° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés du diamètre de* (Γ) *et de l'axe de* (H) *soit constante, se compose d'un système de deux droites;*

7° *Si le point* P *est sur la développée de la parabole* (Q), *le lieu du sommet de la parabole* (Q′) *est une parabole.*

L'équation de la parabole (Q) étant

$$(Q) \qquad y^2 - 2px = 0$$

on sait que celle du cercle (Γ) relatif au point P(α, β) est

$$(\Gamma) \qquad x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta}{2}y = 0.$$

L'équation générale d'une conique passant par les points d'intersection de (Q) et (Γ) est

$$\lambda(y^2 - 2px) + x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta}{2}y = 0.$$

Cette conique sera une hyperbole équilatère pour $\lambda = -2$ et une parabole pour $\lambda = -1$, de sorte que les équations de (H) et (Q′) sont respectivement

$$(H) \qquad x^2 - y^2 - (\alpha - 3p)x - \frac{\beta}{2}y = 0$$

$$(Q') \qquad x^2 - (\alpha - p)x - \frac{\beta}{2}y = 0.$$

Si maintenant, on désigne par R le rayon de (Γ), par A le demi-axe de (H) et par 2P le paramètre de (Q′), on trouve

$$(1) \qquad R^2 = \frac{(\alpha + p)^2}{4} + \frac{\beta^2}{16}$$

$$(2) \qquad A^2 = \frac{(\alpha - 3p)^2}{4} - \frac{\beta^2}{16}$$

$$(3) \qquad P = \frac{\beta}{4}.$$

1° L'équation (1) montre manifestement que si R est constant, le lieu du point P est une ellipse.

2° L'équation (2) montre de même que si A est constant, le lieu du point P est une hyperbole.

Lorsque $A = 0$, c'est-à-dire lorsque l'hyperbole (H) se réduit à deux droites rectangulaires, le lieu du point P se compose des deux droites ayant pour équations

$$(4) \qquad \alpha - 3p = \pm \frac{\beta}{2}.$$

3° Si le paramètre de (Q′) est constant, le lieu de P est une droite parallèle à l'axe de la parabole (Q) ce que montre l'équation (3).

4° Si l'on a $5R^2 - 3A^2 = \text{constante} = h^2$
on trouve, d'après (1) et (2),

$$\alpha^2 + \beta^2 + 9\alpha p - 11p^2 - 2h^2 = 0.$$

Le lieu de P est donc, dans ce cas, un cercle.

5° Si l'on a $A = R$, on trouve, toujours d'après (1) et (2),

$$\beta^2 + 16\alpha p - 16p^2 = 0.$$

Cette équation représente une parabole.

6° Si $$R^2 + A^2 = \text{constante} = h^2,$$
il vient $$\alpha^2 - 2\alpha p + 5p^2 - 2h^2 = 0,$$
ou $$\alpha = p \pm \sqrt{2h^2 - 4p^2}.$$

Le lieu se compose alors de deux droites parallèles à la tangente au sommet de (Q).

Lorsque $h > p\sqrt{2}$, ces deux droites sont réelles; si $h < p\sqrt{2}$, elles sont imaginaires.

Si $h = p\sqrt{2}$, les deux droites se réduisent à la droite dont l'équation est $\alpha = p$.

7° On trouve pour les coordonnées du sommet de la parabole (Q')

$$(5) \qquad x_0 = \frac{\alpha - p}{2}, \qquad y_0 = -\frac{(\alpha - p)^2}{2\beta}.$$

Or, si le point P est sur la développée de la parabole (Q), on a

$$(6) \qquad \beta^2 = \frac{8(\alpha - p)^3}{27p}.$$

L'élimination de α et β entre ces trois dernières équations conduit à l'équation

$$y_0^2 = \frac{27p}{16} x_0.$$

C'est une parabole, lieu du sommet de la parabole (Q').

Remarque. — En éliminant α et β entre les équations (1), (2) et (3), on trouve la relation assez curieuse

$$\sqrt{R^2 - P^2} - \sqrt{A^2 + P^2} = 2p$$

qui lie, entre eux, le rayon de (Γ), l'axe de (H) et les paramètres de (Q) et (Q').

45. — *Étant donnée une parabole, il existe deux droites telles qu'en abaissant d'un point quelconque de l'une d'elles les normales à la courbe, le cercle circonscrit au triangle des pieds des normales coupe la parabole suivant un système de droites perpendiculaires entre elles.*

1° Le lieu du point de rencontre de ces deux droites se compose de deux lignes droites;

2° Le lieu des points de rencontre des deux autres systèmes de sécantes communes au cercle et à la parabole se compose de deux hyperboles équilatères.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Boutin.**

(*Suite*, voir page 170).

342. — *On joint un point* M, (x_1, y_1, z_1, *en coordonnées normales*) *aux sommets du triangle. Soient* A_1, B_1, C_1 *les orthccentres des triangles :* MBC, MCA, MAB. *Lieu du point* M, *les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *étant concourantes.*

On trouve aisément pour les équations de deux hauteurs de MBC.

$$x(y_1 \cos B - x_1 \cos A) + z(y_1 + x_1 \cos C) = 0,$$
$$x(z_1 \cos C - x_1 \cos A) + y(z_1 + x_1 \cos B) = 0.$$

L'équation de AA_1 est donc

$$-\frac{z}{y} = \frac{(z_1+x_1 \cos B)(x_1 \cos A - y_1 \cos B)}{(y_1+x_1 \cos C)(z_1 \cos C - x_1 \cos A)},$$

et des équations analogues pour BB_1, CC_1, d'où pour la condition de concours de ces droites

$$(z_1 + x_1 \cos B)(y_1 + z_1 \cos A)(x_1 + y_1 \cos C)$$
$$+ (y_1 + x_1 \cos C)(x_1 + z_1 \cos B)(z_1 + y_1 \cos A) = 0$$

qu'on peut écrire

$$(a^2 + b^2 + c^2)xyz + \Sigma bcx(y^2 + z^2) = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$ax + by + cz = 0, \quad \text{droite de l'infini;}$$

et
$$ayz + bxz + cxy = 0, \quad \text{cercle circonscrit.}$$

Des considérations géométriques élémentaires montrent que les lieux de A_1, B_1, C_1 sont respectivement des circonférences symétriques de la circonférence O par rapport aux côtés.

Le triangle $A_1B_1C_1$ est homothétique et égal à ABC. Le centre d'homothétie est le point de concours des droites AA_1, BB_1, CC_1; ce point décrit le cercle des neuf points.

343. — *La droite*

$$(1) \qquad xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0$$

a pour transformée par points inverses la conique $\sum \frac{x_1}{x} = 0$, (x_1, y_1, z_1 *étant dit le point de Lemoine de cette conique*), *on demande le lieu du point de Lemoine des coniques circonscrites telles que leur centre soit sur la droite* (1).

On trouve la cubique (coordonnées barycentriques)

$$\sum \frac{\alpha^2}{a^2}(\beta + \gamma - \alpha) = 0.$$

Elle passe par les pieds des médianes et des bissectrices intérieures et extérieures du triangle de référence.

Si on prend pour triangle de référence le triangle des pieds des médianes, l'équation de cette cubique devient

$$\sum \frac{1}{a^2}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} + \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}\right)^2 = 0;$$

elle est sa propre transformée par points réciproques dans ce triangle, elle n'a aucun point à l'intérieur de ce triangle et est tangente à son cercle circonscrit, en ses sommets.

344. — *Le lieu des centres des coniques circonscrites et passant en outre par un quatrième point* M *est une conique* C_1. *On demande le lieu des centres des coniques* C_1 *quand* M *décrit lui-même une conique circonscrite.*

x_1, y_1, z_1 étant les coordonnées normales de M, l'équation de C_1 est

$$\sum ax\left(\frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} - \frac{x}{x_1}\right) = 0.$$

Si M décrit une conique circonscrite, on a

$$(1) \qquad \frac{\lambda}{x_1} + \frac{\mu}{y_1} + \frac{\nu}{z_1} = 0.$$

Le centre de C_1 est donné par les relations

$$\frac{1}{a}\left(\frac{by}{x_1} - \frac{2ax}{x_1} + \frac{cz}{x_1} + \frac{ay}{y_1} + \frac{az}{z_1}\right) = \frac{1}{b}\left(\frac{bx}{x_1} + \frac{ax}{y_1} - \frac{2by}{y_1} + \frac{cz}{y_1} - \frac{bz}{z_1}\right)$$

$$= \frac{1}{c}\left(\frac{cx}{x_1} + \frac{cy}{y_1} + \frac{ax}{z_1} + \frac{by}{z_1} - \frac{2cz}{z_1}\right);$$

d'où pour l'équation du lieu, en coordonnées barycentriques,

$$\sum \frac{a\lambda}{\beta + \gamma - 3\alpha} = 0,$$

conique circonscrite à un triangle obtenu en menant des parallèles aux cotés de ABC au quart de la hauteur à partir du pied de cette hauteur.

345. — M *étant un point du plan du triangle,* $A_1B_1C_1$ *son triangle podaire; de* M_1 *on abaisse sur* B_1C_1 *une perpendiculaire qui rencontre* BC *en* A'; B', C', *sont des points analogues.* (x_1, y_1, z_1) *étant les coordonnées normales de* M, *on trouve pour équations de* AA', BB', CC' :

$$(AA') \qquad \frac{y}{z} = \frac{z_1(ax_1 + by_1) + cy_1^2}{y_1(ax_1 + cz_1) + bz_1^2}$$

$$(BB') \qquad \frac{z}{x} = \frac{x_1(by_1 + cz_1) + az_1^2}{z_1(by_1 + ax_1) + cx_1^2}$$

$$(CC') \qquad \frac{x}{y} = \frac{y_1(ax_1 + cz_1) + bx_1^2}{x_1(by_1 + cz_1) + ay_1^2}$$

Si M *est* I, *ces trois droites concourent en* I;
Si M *est* G, *elles concourent en* D'_2, *inverse du milieu de* $\Omega\Omega'$;
Si M *est* O, *elles concourent en* G.
Si M *est* H, *elles concourent au réciproque de* O.

EXERCICE ÉCRIT

83. — On donne trois droites Δ, Δ', Δ''; Δ, Δ'' ne se rencontrent pas; mais Δ' rencontre Δ et Δ''. On fait passer par ces droites des quadriques Q et par le centre de chacune d'elles on mène une droite δ, parallèle à une direction fixe; trouver le lieu décrit par les extrémités des diamètres ainsi obtenus.

Notes sur l'exercice 82.

Nous prenons pour axes Ox, Oy, les droites Δ, Δ'; pour axe Oz, la normale en O, au plan yOx.

L'équation de Σ est

$$f = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 - 2Rz = 0.$$

Soient α, β, γ les coordonnées de S. L'équation de U est

$$(1)\quad \begin{cases} f(\alpha, \beta, \gamma) \left\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 - 2Rz\right\} \\ \quad = \left\{(x-a)(\alpha-a) + (y-b)(\beta-b) + z(\gamma-R) - R\gamma\right\}^2. \end{cases}$$

Faisons $z = 0$, nous avons

$$(2)\quad x^2[f-(\alpha-a)^2] + y^2[f-(\beta-b)^2] - 2xy(\alpha-a)(\beta-b) + \ldots = 0.$$

Cette équation devant représenter une parabole, on a

$$(\alpha-a)^2(\beta-b)^2 = [f-(\alpha-a)^2][f-(\beta-b)^2].$$

Finalement, toutes réductions faites, on trouve

$$\gamma(\gamma-2R) = 0.$$

En supposant $\gamma = 0$, on obtient la solution singulière, évidente *a priori*, qui correspond au point O.

Prenons donc $\gamma = 2R$. L'équation (1), quand on suppose $z = 0$, $y = 0$, donne

$$f(\alpha, \beta, \gamma)[(x-a)^2 + b^2] = [(\alpha-a)(x-a) - b(\beta-b) - R\gamma]^2.$$

Elle doit avoir une racine double. En considérant $x-a$, comme l'inconnue, et en écrivant que l'équation a ses racines égales, on a

$$(\alpha-a)^2[b(\beta-b)+R\gamma]^2 = (\beta-b)^2[b^2(\alpha-a)^2 - R^2\gamma^2 - 2bR\gamma(\beta-b)].$$

Posons $\alpha - a = X$, $\beta - b = Y$, cette relation devient

$$X^2(bY + 2R^2)^2 = Y^2(b^2X^2 - 4R^4 - 4R^2bY)$$

ou, après réduction, $R^2 + bY = 0$.

On trouve, de même, $R^2 + aX = 0$.

(*) Par exemple, l'enveloppe des axes quand $a^2 + b^2 = R^2$; on trouve le centre $x^2 + y^2 = R^2$.

Ainsi le point cherché est celui dont les coordonnées sont

$$\alpha = a - \frac{R^2}{a}, \qquad \beta = b - \frac{R^2}{b}, \qquad \gamma = 2R.$$

En portant ces valeurs dans (2), on trouve que la parabole, trace du cône U sur le plan yOx, a pour équation

$$(a^2 + b^2)\,[(x - a)^2 + (y - b)^2] = (bx + ay)^2.$$

Elle a pour foyer le point (a, b); résultat évident *a priori*. En écrivan l'équation précédente sous la forme

$$(ax - by + b^2 - a^2)^2 - 4ab\,(bx + ay) + 4a^2b^2 = 0,$$

on met en évidence l'axe et la tangente au sommet. En assujettissant le point (a, b) à certaines conditions, on peut se proposer des lieux géométriques divers sur la parabole en question.

En s'appuyant sur le théorème de Dandelin et sur les propriétés bien connue de la parabole, on retrouve facilement, pour les considérations purement géométriques, les résultats précédents.

QUESTION 249

Solution par M. H. Brocard.

Trouver le lieu des centres des coniques qui ont un sommet donné et qui passent par deux points fixes A, B.

O désignant le sommet donné, prenons pour axe des x la droite OA, et pour axe des y une perpendiculaire Oy à OA, menée par le point O.

Soient (a, o), $(m_1 n)$ les coordonnées des points A et B. L'équation générale des coniques passant par les points O, A, B est

$$Ay^2 + Bxy + x^2 - ax + Dy = 0,$$

avec la condition

(1) $$An^2 + Bm.n + m^2 - am + Dn = 0.$$

Le centre $M(x, y)$ est donné par les équations

(2) $$2x + By - a = 0,$$

(3) $$Bx + 2Ay + D = 0;$$

il a pour coordonnées

$$x = -\frac{BD + 2Aa}{B^2 - 4A},$$

$$y = \frac{Ba + 2D}{B^2 - 4A}.$$

Le diamètre issu de l'origine a donc pour coefficient d'inclinaison

$$n = -\frac{Ba + 2D}{BD + 2Aa}.$$

La tangente en O a pour coefficient d'inclinaison

$$t = \frac{a}{D}.$$

L'origine étant au sommet de la conique, les deux droites précitées sont rectangulaires. La condition $nt = -1$ donne

$$(4)\qquad \frac{a}{D}\cdot\frac{BA + 2D}{BD + 2Aa} = 1.$$

L'équation du lieu (M) résultera de l'élimination de A, B, D entre les quatre équations (1), (2), (3), (4).

Or, l'équation (4), réduite, donne

$$D = -\frac{ay}{x}.$$

Les équations (1), (2), (3) deviennent

$$(5)\qquad An^2x + Bmnx + m^2x - amx - nay = 0,$$

$$(6)\qquad By + 2x - a = 0,$$

$$(7)\qquad 2Axy + Bx^2 - ay = 0.$$

De l'équation (6) on tire

$$B = \frac{a - 2x}{y}.$$

L'équation (7) donnera alors

$$A = \frac{ay^2 - ax^2 + 2x^3}{2xy^2}.$$

Portant dans (5), on aura l'équation du lieu (M).

$$n^2(ay^2 - ax^2 + 2x^3) + 2mnxy(a - 2x) + 2(m^2x - amx - nay)y^2 = 0.$$

Elle représente une cubique ayant à l'origine un point double où les deux tangentes sont rectangulaires. La courbe admet une asymptote réelle.

En formant la condition $B^2 - 4A = 0$, on aura l'équation de la courbe séparatrice des points du lieu (M) correspondant aux hyperboles et aux ellipses.

Nota. — Autres solutions par MM. REZEAU. conducteur des ponts et chaussées, et G. LEINEKUGEL.

QUESTION 373

Solution par M. A. Droz-Farny.

D'un point P *du plan d'une ellipse donnée on abaisse les quatre normales à l'ellipse, dont les pieds sont* A, B, C, D: *et on considère les cercles circonscrits aux quatre triangles* ABC, ACD, ABD, *et* BCD.

1° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés des distances des centres de ces quatre cercles au centre de l'ellipse soit constante est une certaine hyperbole* H ;

2° *Le lieu des points* P *tels que la somme des carrés des rayons des quatre cercles soit constante est une autre hyperbole* H' *concentrique et homothétique à l'hyperbole* H ;

3° *Quel que soit le point* P, *la somme des puissances du centre de l'ellipse par rapport aux quatre cercles est constante.*

(E.-N. Barisien.)

L'ellipse a pour équation

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

L'hyperbole d'Apollonius du point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0.$$

Éliminons x entre ces deux équations, on obtient

$$c^4y^4 + 2c^2b^2\beta y^3 + y^2[b^2a^2\alpha^2 + b^4\beta^2 - b^2c^4] + \ldots - b^6\beta^2 = 0.$$

L'hyperbole rencontre l'ellipse en quatre points dont les ordonnées sont y_1, y_2, y_3, y_4; on a donc:

$$\Sigma y = -\frac{2b^2\beta}{c^2}.$$

On trouve de même $\Sigma x = \frac{2a^2\alpha}{c^2}$,

puis

$$\Sigma y^2 = \frac{2b^2}{c^4}[b^2\beta^2 + c^4 - a^2\alpha^2], \text{ et } \Sigma x^2 = \frac{2a^2}{c^4}[a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 + c^4].$$

On sait en outre que le cercle qui passe par les points B, C, D a pour équation:

$$x^2+y^2+x\left[\frac{c^2x_1}{a^2} - \alpha\right] - y\left[\frac{c^2y_1}{b^2} + \beta\right] - \frac{b^2}{a^2}x_1^2 - \frac{a^2}{b^2}y_1^2 - \alpha x_1 - \beta y_1 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont :

$$x = \frac{1}{2}\left[\alpha - \frac{c^2x_1}{a^2}\right] \qquad y = \frac{1}{2}\left[\beta + \frac{c^2y_1}{b^2}\right],$$

$$4R^2 = \left[x_1\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right) + \alpha\right]^2 + \left[y_1\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right) + \beta\right]^2.$$

1° Représentons $\Sigma(x^2 + y^2)$ par L^2 ; on aura :

$$4L^2 = \left[\frac{c^4}{a^4}\Sigma x^2 - \frac{2c^2\alpha}{a^2}\Sigma x + 4\alpha^2\right] + \left[\frac{c^4}{b^4}\Sigma y^2 + 2\frac{c^2\beta}{b^2}\Sigma y + 4\beta^2\right]$$

d'où, pour le lieu cherché,

$$b^2c^2\beta^2 - a^2c^2\alpha^2 = 2a^2b^2L^2 - c^4(a^2 + b^2),$$

équation d'une hyperbole H concentrique à l'ellipse.

2° Représentons par M^2 la somme des carrés des rayons.

$$4M^2 = \left[\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)^2\Sigma x^2 + 2\frac{(a^2+b^2)}{a^2}\alpha\Sigma x + 4\alpha^2\right]$$
$$+ \left[\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)^2\Sigma y^2 + \frac{2(a^2+b^2)}{b^2}\beta\Sigma y + 4\beta^2\right]$$

d'où, après simplifications,

$$b^2c^2\beta^2 - a^2c^2\alpha^2 = 2a^2b^2M^2 - (a^2 + b^2)^3,$$

hyperbole homothétique et concentrique à la précédente.

3° Représentons par K^2 la somme des puissances :

$$K^2 = \frac{b^2}{a^2}\Sigma x^2 + \frac{a^2}{b^2}\Sigma y^2 + \alpha\Sigma x + \beta\Sigma y = 2(a^2 + b^2)$$

quantité indépendante de la position du point P.

Nota. — Solutions analogues par Mme Ve F. PRIME et M. GROLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille.

QUESTIONS PROPOSÉES

404. — On donne quatre droites représentées par les équations : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$, $A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = 0$; trouver, en fonction des coefficients, l'expression du rapport anharmonique du faisceau qu'elles forment. En déduire les conditions : 1° pour que deux des rayons coïncident ; 2° pour que le faisceau soit harmonique ; les rayons 1 et 2, puis les rayons 1 et 3 étant conjugués. *(Delens.)*

405. — Sur une spirale logarithmique, de pôle O, on prend trois points A_1, A_2, A_3 tels que la droite OA_2 soit bissectrice de l'angle A_1OA_3, le point A_2, se trouvant d'ailleurs entre A_1 et A_3, sur la courbe supposée décrite d'un mouvement continu. Démontrer que la droite OA_2 est symédiane du triangle $A_1A_2A_3$. *(d'Ocagne.)*

406. — On donne une droite et une conique. On prend le pied, sur une tangente à la conique, de la perpendiculaire commune à cette droite et à la droite donnée. Quel est le lieu de ce point, lorsqu'on fait varier la tangente à la conique? *(Mannheim.)*

407. — On donne une droite et une sphère. On prend le pied, sur une tangente à la sphère, de la perpendiculaire commune à cette droite et à la droite donnée. Quelle est la surface qui limite la région occupée par les pieds analogues, obtenus en faisant varier la tangente à la sphère? *(Mannheim.)*

408 — On projette le centre O d'une ellipse, en P, sur la normale en M.

Le cercle, de centre P, et de rayon PM, rencontre l'ellipse en deux points Q et Q′, autres que M.

Montrer que la tangente à l'ellipse au point M′, diamétralement opposé à M, et la droite QQ′ se rencontrent sur la podaire du centre de l'ellipse. *(E.-N. Barisien.)*

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19048-10-94.

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE
DE TRANSFORMATION

Par M. **G. Leinekugel,** ingénieur hydrographe.

(*Suite*, voir page 222.)

VII. — Quartiques a trois points doubles inflexionnels (*).

Parmi toutes les quartiques admettant trois points doubles A, B, C donnés, il existe une famille qui jouit de propriétés assez remarquables; c'est celle qui correspond dans notre méthode de transformation aux coniques (C) admettant le triangle ABC comme triangle autopolaire.

D'après ce que nous avons fait remarquer (IV), les six tangentes aux trois points doubles sont toutes d'inflexion et sont celles que l'on peut mener de ces points à la conique (C) conjuguée à ABC. Dans le cas de cette conique (C) aucun des sommets du triangle n'est favorisé. Aussi peut-on faire jouer le rôle de centre de la transformation à deux quelconques A, B des sommets du triangle pour passer de (C) à (Γ).

Ces quartiques jouissent de ces deux propriétés :

I. Si d'un point d *d'une quartique* (Γ) *à trois points doubles inflexionnels, on lui mène ses quatre tangentes qui passent en ce point, les quatre points de contact sont situés sur une ligne droite* D.

II. Cette droite D *est une tangente à la conique inscrite dans l'hexagone formé par les six tangentes aux trois points doubles.*

Ajoutons, comme nous allons le démontrer, que cette droite D qui renferme les quatre points de contact des tangentes à la quartique (Γ) issues de ce point d est précisément celle qui, dans la transformation, donne le point d de (Γ).

Considérons la première polaire du point m qui correspond à la tangente D_a de (C) et qui est un point de (Γ). Cette courbe du troisième ordre passe par les points A, B, C où

(*) Chacune des six tangentes aux trois points doubles est une tangente d'inflexion.

elle admet comme tangentes les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ qui sont les conjuguées harmoniques de Am, Bm, Cm par rapport aux tangentes menées de ces points à (C). Ceci résulte d'une propriété bien connue de la tangente au point où la première polaire d'une courbe quelconque la rencontre en l'un de ses points doubles. Quant à la tangente en m, c'est la droite md, en ce point la première polaire et la quartique ont même tangente.

Cette première polaire se décompose en une conique (D) et en une droite. On voit, en effet, qu'il existe une conique

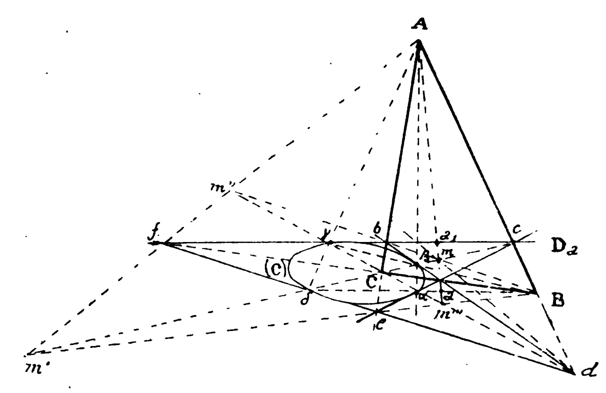


Fig. 1.

circonscrite à ABC et dont les tangentes en ces points sont $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ puisque les droites $A\gamma$, $B\alpha$, $C\beta$ sont concourantes en un point δ. Ce point appartient même à (C). Cette conique passe de plus par le point m. Considérons l'hexagone dont les côtés sont $A\alpha$, Am, mB, $B\beta$, BC et CA, les côtés $A\alpha$, $B\beta$; Am, BC; mB et CA se coupent aux points β, a, b qui sont trois points en ligne droite. Cette conique (D) passant par le point m a donc avec la première polaire, qui est une cubique, sept points en commun avec elle; elle fait partie de cette courbe.

Nous montrerons plus loin (VIII) que cette conique (D) rencontre la conique (C) en quatre points, qui sont les points de contact avec (C) des quatre coniques circonscrites au triangle ABC tangentes à (C) et passant par le point γ de (C).

Pour construire la droite qui avec la conique (D) constitue la première polaire de m par rapport à (Γ), il suffit de remarquer que les points m', m'', m''' obtenus en considérant les tangentes ca, ab et ef à (C) appartiennent à (Γ). De plus, les divisions $(mm'''Aa)$, $(mm'Cc)$ et $(mm''Bb)$ sont harmoniques, par suite la droite cherchée est donc pour le point m la droite D_a.

Ces deux propriétés conduisent (par transformation par polaires réciproques) aux deux suivantes :

Une tangente à une courbe de quatrième classe, touchant les trois côtés d'un triangle en six points conjugués harmoniques deux à deux par rapport aux sommets, la rencontre en quatre points dont les tangentes sont concourantes.

Ce point de concours appartient à la conique qui passe par les six points de contact de cette courbe avec ses trois tangentes doubles.

VIII. — Solution géométrique de la question proposée au concours général (1893).

Nous allons montrer qu'elle résulte immédiatement des propriétés précédemment établies. Nous avons déjà démontré que si l'on considère une conique (C) et un triangle ABC, il existe quatre coniques (c) inscrites dans ce triangle, tangentes à (C) et de plus tangentes à une droite Δ qui elle-même touche (C). La propriété corrélative met en évidence la solution de la première question.

A la conique (C), conjuguée au triangle ABC correspond (*voir* V) une quartique (Γ) à trois points doubles inflexionnels. Menons une tangente Δ à (C) et prenons le point d de (Γ) qui y correspond, les quatre tangentes menées de ce point ont leurs points de contact sur Δ. Voyons quelle est la propriété relative à (C), qui conduit en appliquant notre méthode de transformation, à la précédente relative à (Γ). La droite Δ est la transformée d'une conique inscrite dans le triangle ABC et touchant AB, AC aux points où Δ les rencontre. Les tangentes menées de d à (Γ) sont les transformées de quatre coniques (c) inscrites dans le triangle ABC, tangentes à Δ et à la conique (C). De ce que les quatre points de contact

étaient situés sur Δ, il en résulte que les tangentes à la conique (C) aux points où les quatre coniques (*c*) la touchent, sont avec les trois côtés du triangle sept droites tangentes à une même conique (σ). La droite Δ est la corde des contacts de cette conique (σ) avec les deux côtés AB, AC.

En résumé :

(α) *Les quatre tangentes à une conique* (C) *conjuguée par rapport à un triangle* ABC, *aux points où cette conique est touchée par les quatre coniques* (c) *inscrites dans* ABC *et tangentes à une droite* Δ, *qui touche* (C), *sont avec les trois côtés du triangle sept droites tangentes à une même conique* (σ).

On voit comment se construit cette conique (σ), c'est précisément celle qui a pour transformée (Δ). (Dans la figure 1, (σ) se confondra avec (D) conique touchant ABC en *a*, *b*, *c* si Δ est la droite D_a.)

Nous en déduisons en prenant la propriété corrélative (Transf. par polaire récip.) la démonstration de la dernière question. La construction de la conique (D) qui rencontrera la conique (C) donnée, aux quatre points, est aisée, puisque c'est celle qui, dans notre mode de transformation des figures, correspond au quatrième point D de la conique (C), c'est-à-dire qu'elle sera en B, C tangente à DB, DC et en A à la conjuguée harmonique de DA par rapport à AB, AC. Si D ce point donné, est sur la figure 1 le point γ de (C), on voit que les tangentes à (D) en A, B, C sont $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. Elle coïncide donc, comme nous l'avons annoncé, avec la conique en laquelle se décompose la première polaire du point *m* par rapport à la quartique (Γ) transformée de (C).

Nous avons montré que la droite Δ (ou D_a) qui renferme les quatre points de contact des tangentes menées de *m* à (Γ) était tangente à (C) *(fig. 1)*. Il résulte de là que la conique (σ) (*voir* α) enveloppe, si l'on considère toutes les tangentes Δ à (C), la courbe (Γ'), qui aura pour transformée la conique (C) donnée.

Or, d'après ce que nous avons dit (V-III) précédemment, cette courbe (Γ') est une courbe de quatrième classe qui touche chacun des côtés du triangle ABC en deux points; ces six

points étant ceux où la conique (C) rencontre les trois côtés du triangle.

Transformant alors par polaires réciproques, on en conclut que l'enveloppe de la conique (D) qui passe par les quatre points où les coniques (c) touchent (C) est la quartique (Γ) à trois points doubles A, B, C, transformée de la conique (C). Cette quartique a évidemment ses trois points doubles inflexionnels, puisque (C) est conjugué à ABC.

Cette dernière remarque résout la quatrième partie qui n'est que la répétition des deux propriétés déjà démontrées des quartiques à trois points doubles inflexionnels.

(A suivre.)

ESSAI HISTORIQUE

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par **M. Aubry.**

(*Suite*, voir page 225.)

Nous arrivons à Diophante (350), qui a été longtemps regardé comme le créateur de l'algèbre. Dans le livre qu'il a laissé, Ἀριθμετικα, et dont la première moitié seulement nous est parvenue, il résout, avec la plus grande habileté, de nombreuses questions conduisant à des équations déterminées et indéterminées du premier ou du second degré. Seulement, au lieu de considérer la quantité continue comme les Grecs, il ne traite que des problèmes comportant des solutions en nombres entiers et rationnels, même pour les équations déterminées, ce qui porte à croire qu'il procède des Indiens et qu'il n'avait en vue que l'analyse indéterminée des deux premiers degrés. Il y a lieu de remarquer qu'il donne les limitations à apporter aux données relatives aux équations du second degré, ce qui permet de le considérer comme ayant le premier remarqué cette difficulté appelée depuis *imaginaire.* Il connaît le développement de $(a + b)^2$ et de $(a + b)^3$; Euclide n'avait fait que démontrer géométriquement le premier.

Depuis longtemps, les Indiens cultivaient des questions analogues à celles de Diophante. Ils avaient même des méthodes générales qu'on ne trouve pas dans celui-ci. Le premier auteur indien dont on ait quelques notions sur ses connaissances en algèbre est Aryabhata (500), qui paraît avoir découvert la solution en nombres entiers de l'équation du premier degré à deux inconnues et la règle servant à trouver le nombre des termes d'une progression arithmétique dont on connaît la somme, le premier terme et la raison, règle qu'on ne peut guère avoir découverte fortuitement.

On voit dans Brahmegupta (650), outre de nombreux problèmes d'analyse indéterminée (*) l'expression, de la surface du triangle, en fonction des trois côtés, et celle du quadrilatère inscrit dans un cercle (**).

Les livres de Bhascara (1180), qui contiennent d'excellente algèbre, sont un témoignage de l'antiquité de la science indienne, par la généralité des méthodes et leur ensemble, formant un tout complet, qui ne peut être que le fruit de longs siècles d'études et d'enseignements. On voit entre autres dans Bhascara la règle des combinaisons et le procédé de résolution de certaines équations numériques des second, troisième et quatrième degrés employé et probablement imité par Ferrari pour le quatrième degré en général. C'est là qu'on voit énoncé

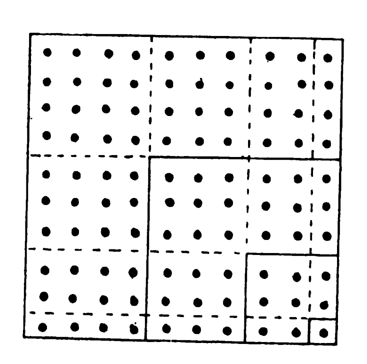


Fig. 5.

(*) Entre autres, cette proposition retrouvée par Euler : *Connaissant une solution en nombres entiers de l'égalité* $ax^2 + b = y^2$, *on en aura une infinité d'autres en posant* $x_1 = mx + ny, \quad y_1 = my + nx.$

(**) On lui doit aussi cette proposition : *La somme des cubes des* n *premiers nombres est égale au carré ed la somme de ces nombres*, dont la demonstration peut se présenter à l'aide de la *figure 5*, en remarquant que la troisième division par exemple peut être considérée comme trois fois la *figure 6* qui donne le carré de 3.

Fig. 6.

ce principe que, pour *déterminer un problème, il faut autant d'équations que d'inconnues* (*).

Peu après la ruine de l'école d'Alexandrie par les Arabes (638), ceux-ci commencèrent à s'intéresser aux sciences. S'ils n'ajoutèrent aucune découverte essentielle à l'algèbre, ils lui donnèrent un autre tour et montrèrent son véritable but, en mariant l'algèbre numérique des Indiens et l'algèbre géométrique des Grecs. Leurs problèmes consistent le plus souvent à proposer de deviner un nombre pensé, connaissant la valeur d'une fonction entière de cette inconnue. Seulement ils s'arrangent toujours pour n'avoir que des termes additifs dans chaque membre.

Parmi les algébristes arabes, nous citerons d'abord Mohamed-ben-Moussa, connu sous le non d'Al-Karizmi (850), dans le livre duquel on voit pour la première fois la résolution explicite des équations du second degré, résolution qu'il divise en trois cas *(note II)*, qu'on peut représenter ainsi :

$$x^2 + q = px, \qquad x^2 + px = q, \qquad x^2 = px + q.$$

Il remarque que le premier cas peut comprendre deux racines (positives, les seules qu'il considère, et c'est pourquoi il ne traite pas le cas $x^2 + px + q = 0$). On lui attribue le nom donné à l'algèbre : *al djabr wall mocabalah* (*restauration et comparaison*), passage d'un terme négatif dans l'autre membre, et opposition de deux expressions qui doivent être égales, d'après l'énoncé). Nous ajouterons que son ouvrage étant un traité élémentaire, la science arabe devait déjà être très avancée dès cette époque.

Nous mentionnerons aussi Al-Karki (1000), qui somme

(*) De savants orientalistes ont émis des doutes sur l'antiquité et le degré de perfection de la science indienne. Ils se fondent surtout sur le long espace de temps qui sépare Brahmegupta de Bhascara sans qu'aucun auteur indien ait avancé la science pendant ce temps. Ils font remarquer aussi que Thalès enseigne aux Égyptiens à mesurer la hauteur des pyramides au moyen de leur ombre, que Diophante annonce entamer une matière neuve, et que c'est probablement dans les livres aujourd'hui perdus de cet auteur qu'ils ont trouvé leurs belles théories d'analyse indéterminée.

Nous avons adopté la version généralement admise aujourd'hui, basée sur ce fait que les Grecs eux-mêmes reconnaissent procéder en science des Égyptiens et des Indiens.

différentes suites de la forme $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots$, $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots$ et dont Fibonacci paraît s'être inspiré; et Al-Kayyami (1100), qui donne la première construction des équations cubiques *(note III)*.

Nous terminerons ce que nous avions à dire des Arabes en signalant quelques tentatives de résolution par approximation de certaines équations par un procédé analogue à celui de Newton, et la fameuse règle d'*El Katain* ou de *fausse position*, qu'on pourrait regarder comme l'origine de la théorie des différences (*).

L'algèbre fut apportée en Italie par Léonard de Pise (*), dit Fibonacci, qui donna en 1202 son célèbre *Abacus*, où on trouve, outre l'exposé de la numération dite arabe, les éléments de l'algèbre, y compris les problèmes du second degré, mais sans ajouter à ce qu'avait déjà donné Al-Karizmi (**). Il se montre au contraire original et profond analyste dans ses autres ouvrages. Par exemple, dans le *Flos*, il résout un grand nombre d'équations du premier degré par des méthodes ayant une grande analogie avec celle des déterminants; il enseigne le procédé des permutations circulaires pour les équations symétriques, et trouve, sans dire comment, la racine d'une équation du quatrième degré qui lui avait été proposée, probablement par la méthode à laquelle Newton a attaché son nom. Mais c'est surtout dons son *Liber Quadratorum* qu'il a montré un véritable génie : cet ouvrage a beaucoup contribué aux progrès de la théorie des nombres (***).

(*) On sait qu'elle consiste à faire une supposition s'il s'agit d'un problème du premier degré, deux s'il s'agit d'un problème du second, et à corriger d'après les erreurs que ces hypothèses produisent dans les résultats.

(*) On cite antérieurement à Fibonacci plusieurs algébristes européens, entre autres Platon de Tivoli, mais leurs écrits ne paraissent pas avoir produit grande impression.

(**) Cependant, Éd. Lucas y a trouvé la considération de la célèbre série numérique 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, 13,... dont Albert Girard, Cassini, Simson, Lamé et Ed. Lucas lui-même ont signalé les innombrables propriétés.

(***) C'est là qu'on doit chercher l'origine de la fameuse identité

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

La démonstration géométrique qu'en donne Fibonacci est trop longue pour que nous la rapportions ici.

Nous devons ajouter que Diophante a eu connaissance de cette identité mais sans le dire expressément.

Le premier traité d'algèbre qui ait été imprimé est la *Summa Arithmetica* de Paciolo (Lucos de Burgo), qui parut à Venise en 1494. C'est une sorte de commentaire des ouvrages de Fibonacci. On y trouve, entre autres nouveautés, quelques équations où l'inconnue est en exposant, et un essai sur les probabilités.

C'est vers cette époque que l'algèbre commence à prendre le grand essor qui l'a portée au haut point où elle est aujourd'hui. Vers 1505, Scipion Ferro découvrit, au dire de Cardan, la résolution d'un cas particulier de l'équation cubique. Cette découverte mémorable fut longtemps inconnue, mais Tartaglia, informé de ce fait, s'y appliqua et découvrit vers 1534, la résolution générale, qu'il distingue en trois cas

$$x^3 + px = q, \qquad x^3 + q = px, \qquad x^3 = px + q.$$

Il s'aperçut que, dans certains cas, il y a plusieurs racines répondant à la question (racines positives). On ne connaît pas la manière dont il est parvenu à la découverte : on sait seulement que c'est en considérant la figure d'un cube formé sur la somme de deux droites.

Cette découverte, communiquée à Cardan, fut imprimée dans l'*Ars magna* (Nuremberg, 1545) de celui-ci, ce qui a fait donner le nom de règle de Cardan à la formule connue. Il la donne, du reste, sans la démontrer autrement que par la considération employée par Tartaglia. Sa démonstration, ou plutôt sa vérification, revient à celle qu'on donne habituellement.

Si l'on doit blâmer Cardan d'avoir divulgué une découverte qui ne devait l'être que par Tartaglia, il faut lui reconnaître les perfectionnements qu'il lui a apportés : il a étendu la solution à tous les cas de l'équation cubique, complète ou incomplète; il a introduit l'idée des racines négatives et des imaginaires. On lui doit la considération du cas irréductible, qu'il a même jugé n'avoir lieu que dans le cas des trois racines réelles. Enfin, il a observé que, du moins pour les quatre premiers degrés, les imaginaires vont par couples, que le second coefficient est égal à la somme des racines et indiqué la manière de le faire disparaître, que le polynôme est divisible algébriquement par la racine retranchée de l'inconnue, que deux nombres substitués à l'inconnue comprennent une

racine réelle, s'ils produisent des résultats de signes contraires.

La résolution des équations biquadratiques est due à l'un de ses élèves, Ludovico Ferrari, qui l'avait secondé dans ses recherches.

L'*Algebra* de Bombelli (Bologne, 1572) contient toutes ces découvertes présentées méthodiquement et avec des notations simples et assez commodes, amélioration dont on commençait à sentir le besoin pour le perfectionnement de l'algèbre *(note IV)*. L'auteur y démontre géométriquement que le cas irréductible n'a lieu que quand les trois racines sont réelles *(note III)*.

Jusque-là, l'algèbre était numérique ou géométrique. Nous voulons dire par là qu'elle s'appliquait, ou à des données numériques, et par conséquent particulières, qui par suite des calculs successifs, ne laissaient aucune trace; ou bien à des données géométriques, lesquelles étaient d'un caractère plus général, mais indirectes comme exposition et démonstration. On avait bien des équations parlées, mais la pensée était tellement retardée par la longue suite de raisonnements qu'entraînait cette méthode primitive, que les progrès de l'analyse ne se faisaient que fort lentement, et n'étaient même susceptibles que de perfectionnements restreints. Viète comprit l'immense avantage qu'il y aurait à condenser les expressions analytiques en remplaçant par des lettres, non seulement les inconnues, — ce qui se pratiquait avant lui, — mais encore les quantités connues; ce qui substituait à la solution d'un problème souvent longue et embarrassée une simple *formule* facile à retenir et appliquer ou discuter dans tous les cas, et permettait de fouiller plus profondément le champ ouvert aux investigations algébriques, par la commodité de l'instrument qu'il venait d'imaginer.

Partant de cette idée, Viète est arrivé à donner à l'algèbre une face toute nouvelle, et des découvertes importantes et de la plus grande généralité. Le premier, il envisagea les équations sous leur forme générale; reconnut la multiplicité de leurs racines et enseigna même une méthode pour les découvrir en considérant les polynômes comme des puissances

imparfaites d'un binôme; enseigna les transformations qu'on peut faire subir aux équations; montra la composition des coefficients en fonction des racines, du moins pour les racines positives, les seules dont il se soit occupé. On lui doit cette remarque que la résolution de l'équation cubique se ramène ou à la détermination de deux moyennes proportionnelles, ou à la trisection d'un angle (*) *(Note III)*.

Les ouvrages de Viète où sont consignées ces découvertes, et parmi lesquels nous citerons *De recognitione æquationum*, *De emendatione æquationum* et *De numerosa potestatum adfectarum resolutione*, ont été publiés pour la première fois à Tours de 1593 à 1600.

Les premiers qui, marchant sur les traces de Viète, ajoutèrent à ces découvertes, sont Harriot et Albert Girard. Le premier *(Artis analyticæ praxis*, publié à Londres, 1631, dix ans après sa mort), imagina de mettre dans un seul membre tous les termes de l'équation et zéro dans l'autre, ce qui l'amena à étendre au cas des racines négatives le théorème de Viète sur la composition des coefficients et à faire voir que tout polynôme est décomposable en facteurs du premier degré. Il a vaguement exprimé cette idée que les racines négatives et les racines imaginaires concourent avec les positives à former un nombre total de solutions égal au degré de l'équation.

Albert Girard, dans son *Invention nouvelle en algèbre* (Amsterdam, 1629), s'attache à la construction du cas irréductible par la méthode de Viète *(Note III)*. Avant Descartes, il

---

(*) Cotes (*Philosophical Transactions*, 1714), présente ainsi cette découverte de Viète.

1° Soit $x^3 + 3a^2x \mp 2a^2b = 0$. On fera *(fig. 7)* $AB = a$, $AC = b$; on insérera deux moyennes m, n, entre $BC + CA$ et $BC - CA$. L'unique racine réelle est $\pm (m - n)$.

2° Soit $x^3 - 3a^2x \pm 2a^2b = 0$, a étant plus petit que b. On fera $AB = a$, $BC = b$ et on insérera deux moyennes m, n entre $BC + CA$ et $BC - CA$. L'unique racine réelle est $\pm (m + n)$.

Fig. 7.

3° Soit $x^3 - 3a^2x \mp 2a^2b = 0$, $a > b$. On fera $AB = a$, $BC = a$; appelons m le sinus du tiers de la somme des angles A, B et n celui du tiers de leur différence, le rayon étant égal à $2 . BC$. Les trois racines sont $\pm (m + n)$, $\mp m$, $\mp n$.

Le troisième cas se trouve donc par la trisection d'un angle et les deux premiers par celle d'une *raison* (rapport).

indique que le moins rétrograde où le plus avance; et avant Newton, il donne les expressions des sommes des carrés, des cubes et des bicarrés des racines; il faut dire qu'il ne tire aucun parti de ces grandes découvertes.

Dans sa *Géométrie*, publiée à Leyde, en 1637, avec les *Météores* et la *Dioptrique* à la suite du *Discours sur la méthode*, Descartes a donné un précis d'algèbre avec ses applications à la géométrie. On y voit d'abord cette règle de mise en équation d'un problème, de ne faire aucune distinction entre les données et les inconnues, puis d'exprimer analytiquement leurs dépendances mutuelles jusqu'à ce qu'on ait trouvé le moyen de présenter un fait de deux manières différentes, ce qui donne une équation. On y trouve l'interprétation géométrique des racines négatives par le changement de sens de leur mesure; l'explication de la présence des racines imaginaires par l'impossibilité de construire le problème géométrique qui y conduit; la méthode des coefficients indéterminés; celle de trouver les racines égales (*); la résolution de l'équation du quatrième degré par la décomposition du premier membre en facteurs du second; la première idée du théorème sur le degré de l'équation résultant de l'élimination d'une inconnue entre deux équations (**); sa fameuse *règle des signes;* enfin sa construction des équations des troisième et quatrième degrés, par une parabole, — construction généralisée successivement par Baker, Wallis, Sluze, Newton, Halley, l'Hospital et Chasles (***) et celle des équations des cin-

(*) Pour établir la présence de deux racines égales dans l'équation $x^m + Ax^{m-1} + \ldots = 0$, il assimile le premier membre au produit développé de

$$(x^{m-2} + A'x^{m-3} \ldots)(x^2 - 2ax + a^2),$$

A..., désignant des coefficients actuellement indéterminés.

(**) Il remarque en effet que la construction des racines d'une équation peut se faire par l'emploi de deux courbes dont le degré est égal au produit de ceux des courbes en question. Cette remarque a été précisée et démontrée par Fermat et Jacques Bernoulli.

(***) On a tiré de là plusieurs constructions mécaniques ou graphiques de la solution. Ainsi Colson *(Phil. Trans*, 1713) propose l'emploi d'un fil à plomb dont un point décrit une horizontale, tandis qu'un crayon tend le fil et trace dans le plan vertical du point de suspension une courbe qui est une hyperbole. Guido-Grandi (*Flores Geometrici,* Florence, 1728) indique le même procédé, seulement le crayon trace une horizontale et la solution

quième et sixième degrés par le *trident* ou *compagne de la parabole.*

Ces découvertes ne concernent que le mécanisme analytique : le principe lui-même a été mis en lumière par Descartes. Il a affranchi l'algèbre de tout lieu géométrique, en prescrivant l'emploi d'une unité arbitraire, mais fixe, dans le courant d'un même problème, — ce qui ramenait le calcul des puissances des lignes à celles de simples nombres ; — et en créant la théorie des fonctions continues de deux variables, théorie qu'il applique ensuite à la géométrie et qui devient entre ses mains la géométrie analytique.

A la suite de Descartes, de Beaune indique l'utilité de la recherche des limites des racines, et donne pour tous les cas des quatre premiers degrés des règles qui se résument dans la méthode appelée aujourd'hui des *groupements;* et Hudde s'applique à la recherche des diviseurs des polynômes et d'un criterium de l'existence des racines égales. Il trouve dans le premier cas que le résultat dépend pour le sixième degré d'une équation du quinzième, et pour le second objet de ses recherches, il trouve la règle connue. Les travaux de ces deux géomètres se trouvent avec beaucoup d'autres pièces intéressantes dans la deuxième édition latine de la *Géométrie* de Descartes, donnée en 1659. *(A suivre.)*

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 229.)

46. — *Si d'un point quelconque d'une droite perpendiculaire à l'axe d'une parabole on abaisse les normales sur la parabole, la somme des carrés des côtés du triangle formé par les pieds des normales est constante.*

---

est donnée par l'intersection d'un point du fil avec une autre horizontale.

Gergonne a proposé pour le même objet la recherche de la normale à la parabole ; cette solution comportant la construction d'une développée de parabole matérielle en cuivre ou en carton.

Si α et β sont les coordonnées du point d'où l'on abaisse les normales, (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des trois pieds des normales, A, B, C, on a

$$\Sigma\overline{AB}^2 = \Sigma(x_1 - x_2)^2 + \Sigma(y_1 - y_2)^2 = 2\Sigma x_1^2 + 2\Sigma y_1^2 - 2\Sigma x_1x_2 - 2\Sigma y_1y_2.$$

Or, les équations aux ordonnées et aux abscisses des pieds des normales sont respectivement

$$(1) \qquad y^3 - 2p(\alpha - p)y - 2p^2\beta = 0,$$

$$(2) \qquad 2x^3 - 4x^2(\alpha - p) + 2x(\alpha - p)^2 - p\beta^2 = 0.$$

On a donc

$$\Sigma y_1 = 0, \qquad \Sigma y_1y_2 = -2p(\alpha - p);$$

$$\Sigma x_1 = 2(\alpha - p), \qquad \Sigma x_1x_2 = (\alpha - p)^2,$$

d'où

$$\Sigma y_1^2 = (\Sigma y_1)^2 - 2\Sigma y_1y_2 = 4p(\alpha - p),$$

$$\Sigma x_1^2 = (\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2 = 2(\alpha - p)^2.$$

On a donc

$$(3) \qquad \Sigma\overline{AB}^2 = 2(\alpha - p)^2 + 12p(\alpha - p) = 2(\alpha - p)(\alpha + 5p).$$

Si α est constant, il en résulte que $\Sigma\overline{AB}^2$ est constant.

Remarque. — On a aussi

$$(4) \qquad \Sigma(x_1 - x_2)^2 = 2(\alpha - p)^2,$$

$$(5) \qquad \Sigma(y_1 - y_2)^2 = 12p(\alpha - p).$$

Par conséquent, *si d'un point quelconque d'une droite perpendiculaire à l'axe d'une parabole on abaisse les normales à la parabole, la somme des carrés des projections des côtés du triangle formé par les pieds des normales, projections faites, soit sur l'axe de la parabole, soit sur la tangente au sommet, est constante.*

47. — *Dans tout triangle formé par les pieds des normales abaissées d'un point du plan d'une parabole sur la parabole, le carré de la somme des carrés des projections des côtés du triangle sur la tangente au sommet, divisé par la somme des carrés des projections des mêmes côtés sur l'axe, est une constante.*

Ce résultat découle immédiatement des formules (4) et (5) de l'exercice 46.

$$\frac{[\Sigma(y_1 - y_2)^2]^2}{\Sigma(x_1 - x_2)^2} = 36p^2.$$

48. — *On considère une parabole et un cercle ayant son centre au foyer de la parabole. Si d'un point quelconque du cercle on abaisse les trois normales à la parabole, le produit des rayons de courbure relatifs aux pieds des normales est constant.*

Soient (α, β) les coordonnées d'un point du plan, y_1, y_2 et y_3 les ordonnées des trois pieds des normales issues de point. Le rayon de courbure R_1 relatif au pied d'ordonnée y_1 a pour expression

$$R_1 = \frac{(y_1^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

de sorte que l'on a

$$\left(y_1^2 + p^2\right)\left(y_2^2 + p^2\right)\left(y_3^2 + p^2\right) = (R_1R_2R_3)^{\frac{2}{3}} p^4$$

ou

$$(1) \qquad p^2\Sigma y_1^2y_2^2 + p^4\Sigma y_1^2 + y_1^2y_2^2y_3^2 + p^6 = (R_1R_2R_3)^{\frac{2}{3}} p^4.$$

Or, d'après l'exercice 46,

$$\Sigma y_1^2 = 4p(\alpha - p),$$
$$y_1^2y_2^2y_3^2 = 4p^4\beta^2,$$
$$\Sigma y_1^2y_2^2 = (\Sigma y_1y_2)^2 - 2y_1y_2y_3\Sigma y_1 = 4p^2(\alpha - p)^2.$$

En substituant ces valeurs dans (1), il vient

$$(2) \qquad 4\left[\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^2 + \beta^2\right] = (R_1R_2R_3)^{\frac{2}{3}}.$$

Par conséquent, si le point (α, β) se déplace sur un cercle ayant son centre au foyer de la parabole, le produit $R_1R_2R_3$ est constant.

Remarque. — La formule (2) a une autre conséquence. Si P est le point (α, β) et F le foyer, on a

$$R_1R_2R_3 = 8\overline{PF}^3$$

c'est-à-dire: le produit des rayons de courbure relatifs aux pieds des normales sur la parabole d'un même point du plan est égal à 8 fois le cube de la distance du point au foyer de la parabole.

49. — *Étant donnée une parabole* (P), *le lieu des points* M, *tels qu'en abaissant les trois normales sur* (P), *les parallèles aux côtés du triangle* ABC *formé par les pieds de ces normales, parallèles menées par le sommet, forment avec la tangente au sommet de la parabole un faisceau harmonique, est une développée de la parabole.*

50. — *D'un point quelconque* P *d'une parabole* (Q) *de sommet* O, *on abaisse les deux normales autres que celle en* P, *dont les pieds sont* A *et* B. *On considère le cercle* (Γ) *circonscrit au triangle* MAB *et l'hyperbole équilatère* (H) *passant par les quatre points* P, A, B *et* O. *Montrer que :*

1° *Le centre de* (Γ) *décrit une parabole,* $(8y^2 - 2px + p^2 = 0)$;

2° *Le centre de* (H) *décrit une parabole,* $(8y^2 - 2px - 3p^2 = 0)$;

3° *Le cercle* (Γ) *enveloppe une cubique,* $[py^2 + 8x(x^2 + y^2 - p^2) = 0]$;

4° *L'hyperbole* (H) *enveloppe une cubique,*

$$[(8x - p)y^2 - 8x^2(x + 3p) = 0];$$

5° *La droite joignant le centre de* (Γ) *au centre de* (H) *enveloppe une développée de parabole,* $[216py^2 - (2x + p)^3 = 0]$.

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Congrès de Caen, 1894.

1re et 2e Sections. — Séance du 14 août.

QUESTION A L'ORDRE DU JOUR

Etude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange de vues plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes.

RÉSOLUTION

Les 1re et 2e sections, après une discussion approfondie, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres,

1° Donnent en principe l'adhésion la plus complète au projet de création de *Congrès mathématiques internationaux* et se déclarent dès à présent disposées à apporter tout leur concours aux efforts qui sont ou seront faits dans cet ordre d'idées;

2° Approuvent absolument l'idée de M. Mansion, relative à la rédaction de *Vocabulaires mathématiques* et applaudissent au commencement de réalisation que M. le commandant Brocard a déjà donné à cette idée par la préparation d'un vocabulaire mathématique français;

3° Expriment l'espoir que le projet de M. Jacques Boyer, concernant l'établissement d'un *Dictionnaire mathématique*, pourra aboutir à un heureux résultat, et en France, et dans la plupart des autres pays;

4° Croient devoir attirer l'attention sur les remarquables monographies mathématiques qui se publient en ce moment en Allemagne, et dont il serait très désirable de voir publier des traductions dans diverses langues;

5° Considèrent que les grands efforts faits par M. le Professeur Peano et plusieurs de ses confrères pour la propagation de la *Logique mathématique* et lapublication d'un *formulaire mathématique* sont de nature à contribuer puissamment au but qu'il s'agit d'atteindre;

6° Sont heureuses de constater le degré d'avancement du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, et, dans le même ordre d'idées, applaudissent à la publication si intéressante due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de M. P.-H. Schoute, et qui est intitulé *Revue Semestrielle des Publications mathématiques;*

7° Estiment que la publication de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, depuis le commencement de 1894, a rendu et est appelée à rendre encore de très grands services, en ce qui concerne les rapports des mathématiciens entre eux; expriment leur reconnaissance aux fondateurs, MM. Laisant et Lemoine, et se félicitent de voir que cette initiative a été due à deux des membres de l'Association française pour l'avancement des Sciences;

8° Prennent en très sérieuse considération les réflexions présentées par M. Lémeray sur la possibilité d'établir des bibliothèques mathématiques,

ayant pour objet de mettre des livres à la disposition des travailleurs éloignés des centres scientifiques;

9° Décident que la question, sous la forme générale où elle a été rédigée, sera maintenue à l'ordre du jour des séances pour la session de Bordeaux en 1895.

Ces diverses résolutions ont été prises à l'unanimité des Membres présents.

BIBLIOGRAPHIE

Formes quadratiques et multiplication complexe, *Deux formules fondamentales, d'après Kronecker*, par J. de Séguier (S. J.), professeur à l'université d'Angers (Berlin, Felix L. Dames, Koch-Strasse, 3).

La première partie de l'ouvrage est consacrée à une généralisation due à Kroneker de la formule de Dirichlet. L'auteur y reprend avec de notables simplifications toute la théorie des formes quadratiques. On remarquera, outre le calcul des sommes de Gauss et l'extension du théorème de réciprocité, l'expression unique du nombre des classes pour les discriminants positifs et négatifs et un théorème important sur le groupe $\mathfrak{H}_d$.

L'objet principal de la seconde partie est la formule

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
&\lim_{\rho=0}\left[\frac{-1}{\rho\sqrt{-D}}+\frac{1}{2\pi}\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{-D}}\left[-2\Gamma'(1)+\log\frac{c}{-D}-2\log\eta(\omega_1)\eta(\omega_2)\right]\\
&D=b^2-4ac,\quad \omega_\alpha=\frac{-b-(-1)^\alpha i\sqrt{-D}}{2c},\quad \eta(\omega)=\rho^{\frac{\pi i\omega}{12}}\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-e^{2n\pi i\omega})\\
&(m,n=0,\pm1,\pm2,\ldots\ \text{sauf}\ m=n=0;\ \alpha=1,2)
\end{aligned}
\right.
$$

où la partie réelle de $\dfrac{ax^2+bxy+cy^2}{\sqrt{-D}}$ est une forme positive. La démonstration de Kronecker a été abrégée et certaines lacunes qu'elle présentait encore relativement à l'intégration et à la continuité des séries ont été comblées avec soin.

La troisième partie est une application combinée des deux formules de Kronecker. Si l'on pose

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{D}{k}\right)\frac{1}{k^{1+\rho}}=H_\rho(D),$$

$$\sum_{a,b,c}^{D}\left(\frac{D_1}{A}\right)\sum_{m,n}(am^2+bmn+cn^2)^{-1-\rho}=\sum_{D_1}(Q^2)$$

$$D_1D_2=D_0Q^2=D=b^2-4ac,$$

(a, b, c) étant une forme positive, D_1, D_2 étant deux discriminants, D_0 un discriminant fondamental, A un nombre premier à $2D$ représentable

par (a, b, c) et la première sommation s'étendant à un système de représentants des classes de D, on aura

$$\frac{\Sigma_{D_1}(Q)^2}{K(D_0 Q^2)} = \sum_d^Q \frac{2H_\rho(D_1 d^2)H_\rho(D_2 d^2)}{d^{2(1+\rho)}K(D_0 d'^2)} \qquad (dd' = Q)$$

K(D) étant le nombre des classes de D et $\sum_d^Q$ s'étendant à tous les diviseurs de Q. Cette relation qui se rattache à de récentes recherches de M. Cahen sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann permet, d'après (1), d'exprimer les normes partielles de la fonction $\dfrac{\eta\left(\frac{\omega}{q}\right)}{\eta(\omega)}$ (ω parcourant les racines d'un genre et q étant un nombre premier) par les solutions de l'équation de Pell. C'est l'extension des résultats obtenus par Kronecker et par M. Weber. L. P.

A la librairie Nony (17, rue des Écoles) plusieurs volumes nouveaux viennent de paraître; nous les signalons à l'attention des professeurs et des élèves.

C'est d'abord l'*Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure*, par MM. Émile Borel et Jules Drach, d'après des conférences faites à l'École normale supérieure par M. Jules Tannery, sous-directeur des études scientifiques.

L'ouvrage se sépare en deux parties très distinctes; la première, rédigée par M. Borel, est une introduction à la théorie des nombres. Cette science a été singulièrement négligée, fort à tort, par la génération à laquelle j'appartiens. Elle n'a guère produit, en France, qu'un adepte, très passionné il est vrai, le regretté Ed. Lucas. M. Tannery a bien raison de dire, dans la préface de ce volume : « Il faut se rappeler que l'enseignement des parties les plus élémentaires de l'arithmétique et de l'algèbre, de ces parties que l'on enseigne dans les lycées, suppose chez le professeur, s'il veut réellement dominer son sujet, au moins quelques vues sur les parties les plus élevées de la science. » Aux professeurs soucieux de ce conseil, cent fois donné, et que leur rappelle ici M. Tannery, nous recommandons la lecture de cette introduction à la théorie des nombres; elle leur donnera peut-être l'idée d'aller plus loin dans cette voie, l'une des plus délicates à suivre dans le champ mathématique, mais aussi l'une des plus attrayantes, quand on a franchi les premiers obstacles.

La seconde partie, due à M. Drach, est une algèbre très philosophique. Elle surprend singulièrement, tout d'abord; la réflexion, aidée d'une lecture plus attentive, n'a pu détruire chez moi, par ma faute probablement, l'impression première. Je ne puis vraiment comprendre, quelque effort que je fasse à ce sujet, l'intérêt qui peut s'attacher à des spéculations n'ayant pas pour but, soit la découverte de faits nouveaux, soit la simplification de l'exposition des vérités déjà connues. Y a-t-il, pour citer un exemple de ces spéculations métaphysiques singulières et c'est d'ailleurs, je crois, la question principale touchée par M. Drach dans cet ouvrage dont la lecture m'a paru si difficile à suivre, y a-t-il un intérêt mathématique à

rechercher s'il existe des symboles nouveaux, tels qu'une équation de degré m ait un nombre de racines égal à son degré? Est-ce l'effet de l'habitude, l'influence des idées vieillies et enracinées, mais je ne puis arriver à me convaincre de l'utilité que comporte une pareille question.

Il me semble, serais-je le seul de cette opinion? que les problèmes que soulèvent la géométrie, la mécanique et la physique n'exigent, pour être résolus, que l'emploi méthodique ou ingénieux des symboles ordinaires; pour être exposés, le simple et clair langage de la science leur suffit. Je vois à regret, que M. Drach me permette de le dire ici, un jeune et bon esprit se lancer dans ce courant philosophique qui pousse, loin des recherches vives, dans des sphères singulièrement nuageuses et, je crois improductives, des efforts qui pourraient trouver un meilleur emploi. Ce mouvement d'entraînement qui a pour conséquence de détacher les forces de leurs véritables points d'application est encore peu sensible. Je crains qu'il ne se généralise, et, tout en reconnaissant les fruits excellents que l'esprit philosophique a autrefois produits, sans mettre en doute l'action qu'il exerce encore aujourd'hui sur nos recherches, je crois que, poussé trop loin, il ne saurait contribuer d'une façon sensible au but véritable, celui que les jeunes mathématiciens ne doivent jamais perdre de vue, le progrès des mathématiques.

Dans un ordre d'idée, tout différent de celui qui a inspiré le livre précédent, la librairie Nony a publié deux ouvrages qui seront bien accueillis des candidats aux écoles. Ce sont les *Questions de mécanique* à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, et un *Cours de mécanique* destiné aux candidats à l'école de Saint-Cyr. Le premier est dû à MM. Laisant et Antomari; le second est de M. Antomari. Il suffit de citer ces auteurs; leurs ouvrages se recommandent d'eux-mêmes à l'attention des professeurs et des élèves. G. L.

On nous prie d'annoncer aux lecteurs du *Journal*, amateurs de vélocipédie, qu'il vient de se constituer à Paris une Société anonyme, au capital de 50.000 francs, pour l'édition d'un superbe Album-Annuaire de la vélocipédie en France, qui portera le titre de *Livre d'Or du Vélo*, Encyclopédie Annuaire illustré du Sport velocipédique, par le comte Victor Oger d'Esbosc, et qui sera mis en vente très prochainement au prix de 5 francs l'exemplaire. Voilà, certes, une heureuse innovation.

On souscrit, dès à présent, aux bureaux de la Société, 14, rue de la Victoire, à Paris.

QUESTION 375

Solution par Mme Ve F. Prime.

Une corde AB *d'une parabole donnée pivote autour du foyer* F. *Les normales en* A *et* B *se rencontrent en* P *et coupent la parabole en deux autres points* A′ *et* B′.

Montrer que :

1° *Les droites* AB *et* A′B′ *sont parallèles;*

2° *Le lieu du point* P *est une parabole;*

3° *La droite* A′B′ *enveloppe une parabole.* (E.-N. Barisien.)

Soit la parabole (π) $\qquad y^2 = 2px.$

La corde AB passant par le foyer F, son pôle C est sur la directrice; la figure CAPB est un rectangle dont la diagonale CP est le diamètre de la parabole conjugué aux cordes de direction AB; et si CP rencontre (π) en D, on a CP = 4.CD.

1° La corde AB étant une corde conjuguée du diamètre CP pour la parabole (π) et pour l'hyperbole équilatère réduite APB, il en est de même de A'B' qui est donc parallèle à AB.

2° Soient x_1, y_1 les coordonnées de D; $CD = x_1 + \frac{p}{2}$, $CP = 4x_1 + 2p$, et ainsi les coodonnées de P sont

$$x = 4x_1 + \frac{3p}{2}, \qquad y = y_1.$$

Dès lors. en tenant compte de la relation $y_1^2 = 2px_1$, on a, pour lieu de P, la parabole

$$y^2 = \frac{px}{2} - \frac{3p^2}{4}$$

qui a même axe que (π) et dont le sommet est le point $\left(\frac{3p}{2}, 0\right)$.

3° Soit Q le point où CP coupe A'B'; cherchons la valeur de CQ. A cet effet, observons que si C est le pied de la directrice, les coordonnées de A sont $\left(\frac{p}{2}, p\right)$; l'équation de AA' est alors

$$y = -x + \frac{3p}{2}$$

et l'abscisse du point A' ou du point Q est $\frac{9p}{2}$. Il en résulte donc que CQ = 10.CD et que, par suite, les coordonnées du point Q sont

$$\frac{5y_1^2}{p} + \frac{9p}{2} \qquad \text{et} \qquad y_1.$$

L'équation de A'B' est donc

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}\left(x - \frac{5y_1^2}{p} - \frac{9p}{2}\right),$$

u

$$4y_1^2 + yy_1 - p\left(x - \frac{9p}{2}\right) = 0.$$

Mise sous cette forme, elle montre que A'B' enveloppe la parabole

$$y^2 + 16p\left(x - \frac{9p}{2}\right) = 0.$$

Nota. — Autres solutions par MM. W. GRENSTREET, GROLLEAU, et E. FOUCART.

QUESTION 376

Solution par Mme Ve F. PRIME.

On considère un point quelconque M *situé sur une ellipse donnée et une corde* AB *telle que cette corde et la tangente en* M *soient également inclinées sur les axes de l'ellipse, l'une en sens inverse de l'autre. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* MAB *est une ellipse, à condition que le segment de la corde* AB *intercepté entre les axes de l'ellipse soit dans un rapport constant avec le segment analogue intercepté sur la tangente en* M.

(E.-N. Barisien.)

L'ellipse donnée E étant rapportée à ses axes de symétrie, si φ est l'angle excentrique de M, l'équation de la tangente en M est

$$\frac{x\cos\varphi}{a} + \frac{y\sin\varphi}{b} = 1,$$

et celle de AB,

$$\pm\frac{x\cos\varphi}{ka} \mp \frac{y\sin\varphi}{kb} = 1.$$

Il en résulte que AB est tangente à l'ellipse

$$\text{(E')} \qquad \frac{x^2}{k^2a^2} + \frac{y^2}{k^2b^2} = 1,$$

au point $M'(\pm ka\cos\varphi, \mp kb\sin\varphi)$. Comme M' est le milieu de AB, le point dont on demande le lieu est l'intersection des normales aux ellipses E, E' aux points M, M'. L'équation de ce lieu résulte donc de l'élimination du paramètre φ entre les équations

$$yb\cos\varphi - ax\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0,$$
$$yb\cos\varphi + ax\sin\varphi \pm kc^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

On tire de ces équations

$$\sin\varphi = \frac{-2yb}{c^2(1 \pm k)} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{2ax}{c^2(1 \mp k)}.$$

Le lieu cherché se compose donc des deux ellipses

$$\frac{4a^2x^2}{c^4(1 \mp k)^2} + \frac{4b^2y^2}{c^4(1 \pm k)^2} = 1.$$

Nota. — Nous avons reçu d'autres solutions, de MM. Droz-Farny, Greenstreet, E. Foucart, Grolleau, très élégantes, un peu moins simples pourtant que la précédente.

QUESTION 377

Solution par Me Ve F. Prime.

D'un point quelconque P, *pris sur la normale en un point* A *d'une ellipse* (E), *on peut mener à cette ellipse trois autres normales dont les pieds sont* B, C, D.

1° *Si le point* P *se déplace sur la normale en* A, *le centre du cercle circonscrit au triangle* BCD *décrit une droite* (Δ);

2° *Dans le même cas, le quatrième point de rencontre du cercle* BCD *avec l'hyperbole d'Apollonius relative au point* P *décrit une autre droite* (Δ');

3° *Si le point* A *se déplace sur l'ellipse* (E), *la droite* (Δ) *est normale à une autre ellipse* (E');

4° *Les quatre droites, telles que* Δ, *relatives aux quatre normales* PA, PB, PC, PD *concourent en un même point.*

(E.-N. Barisien.)

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes de symétrie et soient x_1, y_1, les coordonnées de A.

1° Soient A′ le point diamétralement opposé au point A et O′ la projection de centre O de (E) sur la tangente en A′. Il résulte d'un théorème connu (*) sur le cercle de Joachimsthal que la circonférence BCD, lorsque P se déplace sur la normale en A, passe constamment par les points A′ et O′. Le lieu de son centre est donc la droite Δ correspondant à

(*) C'est le théorème trouvé simultanément par MM. Laguerre et de Longchamps.

l'équation $y + \frac{y_1}{2} = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}\left(x + \frac{x_1}{2}\right)$
parallèle à la normale en A et symétrique de cette droite par rapport au centre O de (E).

2° Si (α, β) sont les coordonnées de P, en posant

$$u = a^2 + \frac{b^2\beta}{y_1} = b^2 + \frac{a^2\alpha}{x_1},$$

l'équation de la circonférence BCD peut s'écrire (**)

$$x^2 + y^2 + xx_1 + yy_1 = u\left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + 1\right).$$

et celle de l'hyperbole d'Apollonius relative à P,

$$c^2xy + (u - a^2)y_1x - (u - b^2)x_1y = 0.$$

L'élimination de u entre ces deux équations conduit à une équation du troisième degré, en x et en y. Mais, comme les trois points B, C, D ont pour lieu l'ellipse (E), cette équation se décomposera nécessairement en deux autres; l'une, sera celle de l'ellipse (E); l'autre, celle d'une ligne droite qui représente le lieu cherché.

3° L'équation trouvée pour Δ montre que Δ est normale à l'ellipse

$$\frac{4x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{b^2} = 1$$

au point $\left(-\frac{x_1}{2}, \ -\frac{y_1}{2}\right)$.

4° Il résulte de 1° que les quatre droites Δ_A, Δ_B, Δ_C, Δ_D concourent au point P', symétrique de P par rapport au centre O de (E).

Nota. — Autres solutions par MM. GHOLLEAU, répétiteur général au lycée de Marseille et DROZ-FARNY, professeur au lycée de Porrentruy.

QUESTIONS PROPOSÉES

409. — Toute cubique, qui est sa propre inverse en coordonnées normales trilinéaires, est telle que la droite MM', qui joint un de ses points M à son inverse M', passe par un point fixe. *(Welsch.)*

(**) DE LONGCHAMPS, *Géométrie analytique à deux dimensions*, page 402.

410. — D'un point P on peut abaisser quatre normales sur une ellipse. Les pieds de ces normales sont A, B, C, D. Chacun des cercles tels que BCD coupe l'hyperbole d'Apollonius du point P en un quatrième point α.

Si le point P décrit une courbe quelconque dans le plan, le centre des moyennes distances des quatre points α décrit une courbe semblable. *(Droz-Farny.)*

411. — On sait que la podaire d'une parabole relative à un point P de l'axe est une cubique circulaire unicursale à axe de symétrie. Cette cubique est caractérisée par l'angle des tangentes au point double. En appelant α le demi-angle des tangentes au point double, d la distance du point P au sommet de la parabole, et p le demi-paramètre de cette dernière, démontrer la formule

$$\cot g^2 \alpha = \frac{p}{2d}.$$

(Cazamian.)

412. — Soient :

1° Une droite (D) sur laquelle on donne n points $a, b, c, \ldots l$, et un point *arbitraire* m;

2° aA, bB, cC, ... lL et mM des ordonnées aboutissant à une certaine courbe (Γ);

3° $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ les points où les cordes MA, MB, MC, ... ML viennent rencontrer la droite (D).

Montrer qu'on peut toujours déterminer la courbe (Γ) de telle sorte qu'on ait, quelle que soit l'ordonnée arbitraire mM,

$$\frac{1}{m\alpha} + \frac{1}{m\beta} + \frac{1}{m\gamma} + \ldots + \frac{1}{m\lambda} = 0.$$

Cette détermination peut se faire d'une infinité de manières, en s'imposant la condition que (Γ) soit une courbe algébrique de degré n. *(Laisant.)*

Le Directeur-Gérant,

G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 20958-10-94

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE
DE TRANSFORMATION

Par M. **G. Leinekugel,** ingénieur hydrographe.

(*Suite* et *fin*, voir page 251.)

VII. — Quelques propriétés des cubiques a point double.

A une conique (C) tangente au côté BC correspond une cubique (γ) d'après ce que nous avons dit sur le degré de la transformée (Γ) d'une courbe quelconque. Évidemment, toute cubique à point double sera susceptible de ce mode de génération simple. Si on en donne le point A double, ses deux tangentes en ce point, deux autres points B, C et leurs tangentes, on passera de ces données à la conique (C). Elle est, en effet, déterminée par le côté BC, les tangentes en B, C à la cubique et les droites conjuguées harmoniques des tangentes au point double A par rapport à AB, AC, qui sont cinq droites tangentes à cette conique (C). Comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette cubique (γ) rencontre le côté BC en un point a' qui, avec le point de contact a de (C) avec cette droite, détermine, avec les sommets B, C, une division harmonique.

Des propriétés évidentes et qui servent de définition même aux coniques, on déduit des propriétés intéressantes des cubiques à point double. En voici quelques-unes :

1° *Il existe deux cubiques* (γ) *circonscrites à un triangle* ABC *admettant le point* A *pour point double et tangentes à quatre coniques données* (D) *circonscrites au triangle* ABC.

Cette propriété correspond évidemment à celle-ci : il existe deux coniques (C) circonscrites à un quadrilatère et tangentes à une droite. On voit avec quelle facilité on construira ces deux cubiques (γ) ; il suffira de passer, des quatre coniques (D), aux points D qui y correspondent; ces quatre points, avec le côté BC, déterminent les deux coniques (C) dont les transformées sont les cubiques (γ).

2° *Il existe quatre cubiques* (γ) *circonscrites à un triangle* ABC *admettant le point* A *pour point double passant par deux autres points donnés* D, E *quelconques et tangentes à deux coniques circonscrites au triangle* ABC.

Cette propriété résulte de celle-ci : il existe quatre coniques tangentes à trois droites et passant par deux points.

3° Une conique inscrite dans le triangle ABC rencontre (C) la conique tangente à BC en quatre points évidemment. Cette propriété évidente nous conduit à celle-ci :

On considère sur une cubique (γ) *à point double* (A) *le triangle* ABC *formé par ce point et deux autres points de* (γ) *: il existe quatre coniques tangentes à une droite quelconque du plan du triangle, inscrites dans ce triangle et tangentes à la cubique* (γ).

4° Une conique quelconque du plan du triangle rencontre une conique (C) tangente à BC en quatre points. Après transformation :

Si on considère une quartique (Γ) *a trois points doubles* A, B, C, *et une cubique* (γ) *circonscrite au triangle* ABC, *le point* A *étant un point double de cette cubique, il existe quatre coniques tangentes aux deux courbes* (Γ) *et* (γ).

Nous terminerons cette partie relative aux cubiques à point double en énonçant cette propriété relative aux coniques, déduite d'une propriété connue des cubiques. Nous laissons au lecteur le soin de voir en appliquant la transformation étudiée ici à quelle propriété elle correspond.

On considère deux coniques (C)(C')*; un point* A *commun à ces deux coniques;* B, C *deux points de* (C')*; il existe deux coniques circonscrites à* ABC *passant par un deuxième point* A_1 *commun aux deux coniques et tangentes à* (C). *On a ainsi en considérant chacun des trois autres points communs* A_1, A_2, A_3 *six coniques et par suite six points de contact* a_1, a'_1; a_2, a'_2; a_3, a_3. *Ces six points sont trois à trois sur une conique circonscrite à* ABC.

VIII

1° Nous avons montré comment on déduisait, grâce à notre méthode de transformation, un théorème général que nous rappelons :

Théorème I. — *Toute courbe d'ordre* $\frac{m^2-1}{2}$ *possédant trois points multiples d'ordre* $\frac{m^2-1}{4}$, *admet* $\frac{m+1}{2}$ *sections coniques passant par ces points multiples, par un point donné du plan et qui, de plus, touchent cette courbe en un point quelconque* (*).

Remarquons que un, deux ou trois des côtés du triangle ABC, choisi arbitrairement dans le plan de la courbe (C), dont (Γ) est la transformée (voir I), peuvent être pris parmi les tangentes à cette courbe (C). Supposons, par exemple, que le côté BC qui renferme les deux centres de la transformation, soit tangent à (C). D'après ce que nous avons dit au sujet de la transformée dans ce cas, nous pouvons énoncer ce théorème :

II. — *Toute courbe d'ordre* $\frac{m^2-3}{4}$ *possédant un point multiple d'ordre* $\frac{m^2-1}{4}$ *et deux points d'ordre* $\frac{m^2-5}{4}$ *admet* $\frac{m+1}{2}$ *sections coniques passant par ces trois points multiples, par un point donné et qui touchent cette courbe en un point quelconque. Plus généralement :*

Toute courbe d'ordre $\frac{m^2-(2p+1)}{2}$ *possédant un point d'ordre* $\frac{m^2-1}{4}$ *et deux points d'ordre* $\frac{m^2-(4p+1)}{2}$ *admet* $\frac{m+1}{2}$ *sections coniques passant par ces trois points multiples, par un point donné du plan et qui touchent cette courbe en un point quelconque.*

Évidemment, dans tout ce qui précède, la courbe n'admet aucun autre point multiple en dehors des trois points désignés.

Ce dernier se déduit aisément d'une courbe (C) d'ordre $\frac{m+1}{2}$, qui admet une tangente qui la touche en p points.

(*) Ce théorème a été énoncé avec ces données : $2c = 2m(m-1)$ était le degré de la courbe et m le nombre des coniques cherchées. Si l'on pose $2c = \frac{m'^2-1}{2}$, on a $m = \frac{m'+1}{2}$.

Cette droite est prise comme côté BC de notre triangle ABC.

Supposons que deux des côtés AC, AB de notre triangle touchent la courbe (C), chacun en un point seulement. La courbe (Γ) est alors d'ordre $\frac{m^2 - 5}{2}$ et possède deux points B, C d'ordre $\frac{m^2 - 5}{4}$ et un point A d'ordre $\frac{m^2 - 9}{4}$. De là, nous déduisons :

III. — *Toute courbe d'ordre* $\frac{m^2 - 5}{2}$ *possédant deux points d'ordre* $\frac{m^2 - 5}{4}$ *et un point d'ordre* $\frac{m^2 - 9}{4}$, *admet* $\frac{m + 1}{2}$ *sections coniques passant par ces trois points multiples, par un point donné du plan et qui touchent cette courbe en un point quelconque.*

Application. — Comme cas particuliers, nous déduisons :

$m = 3$ (II). Il existe deux coniques passant par un point double d'une cubique, par deux autres points donnés de cette courbe, par un point donné de son plan et qui la touchent en un point quelconque.

Les deux points donnés sur la cubique pourront coïncider.

Par tout point du plan d'une cubique à point double passent deux coniques bitangentes à cette cubique, l'un des points de contact étant donné sur la courbe. Ces coniques passent de plus par le point double.

$m = 7$ (III). On considère une courbe d'ordre 22 qui admet deux points multiples d'ordre 11 et un point d'ordre 10; le nombre des sections coniques qui touchent cette courbe en un point quelconque, qui passent par ces trois points multiples et par un point quelconque du plan, est 4. Si nous considérons, enfin, un triangle ABC circonscrit à (c), chaque côté touchant cette courbe en un seul point, la courbe (Γ) sera d'ordre $\frac{m^2 - 7}{2}$ et admet en chacun des sommets un point d'ordre $\frac{m^2 - 9}{4}$. Nous en pouvons conclure que :

IV. — *Toute courbe d'ordre* $\frac{m^2 - 7}{2}$ *possédant trois points d'ordre* $\frac{m^2 - 9}{4}$ *admet* $\frac{m + 1}{2}$ *sections coniques qui passent par ces trois points multiples, par un point donné et qui la touchent en un point quelconque.*

Cas particulier $m = 7$. Il existe quatre coniques passant par les trois points d'ordre 10 d'une courbe d'ordre 21 qui la touchent en un point quelconque et qui passent par un point donné du plan de cette courbe. Cette courbe, comme dans tous les cas précédents, ne possède que ces trois points multiples.

Ces derniers théorèmes se généralisent avec la plus grande facilité. Le dernier, par exemple, peut s'énoncer ainsi :

Pour toute courbe d'ordre $\frac{m^2 - (6p + 1)}{2}$ *possédant trois points multiples d'ordre* $\frac{m^2 - (8p + 1)}{4}$ *le nombre des sections coniques passant par ces points multiples, par un point donné et touchant cette courbe en un point quelconque est* $\frac{m + 1}{2}$.

2° De cet autre théorème, énoncé plus haut (I),

Dans toute courbe d'ordre $\frac{m^2 - 1}{2}$ *possédant trois points d'ordre* $\frac{m^2 - 1}{4}$ *il y a* $m + 1$ *sections coniqnes qui, la touchant en un point quelconque, passent par ses trois points multiples et touchent une droite donnée,*

et, en suivant la même voie que précédemment, on déduirait des théorèmes analogues aux précédents, mais où les coniques considérées, au lieu d'être assujetties à passer par un point du plan, seraient tangentes à une droite donnée.

3° Rappelons un autre théorème général relatif aux courbes d'ordre m qui conduit à quelques propositions intéressantes :

Pour toute courbe d'ordre m *(ou de classe* c*) il y a* $m(m + 1)$ *(ou* $c(c + 1)$*) coniques passant par quatre points donnés (ou tangentes à quatre droites) et touchant la courbe en un point quelconque.* (Voir IV.)

Si l'on remarque que ce nombre diminue de deux unités chaque fois que l'un des points (ou l'une des droites) pris arbitrairement dans le plan viennent sur la courbe (ou en sont des tangentes), on a les propositions suivantes :

a) *Pour toute courbe d'ordre* m *(ou de classe* c*) il y a* $m(m + 1) - 4$ *(ou* $c(c + 1) + 4$*) sections coniques qui passent par 2 points donnés du plan (ou qui touchent 2 droites données) et qui ont un double contact avec la courbe, l'un des points de contact étant donné.*

b) *Pour toute courbe d'ordre* m *(ou de classe* c*) il y a* $m(m + 1) - 6$ *(ou* $c(c + 1) - 6$*) sections coniques qui ont un contact de second ordre en un point donné de cette courbe et qui la touchent en un point quelconque.*

c) *En un point d'une courbe d'ordre* m *(ou de classe* c*) il y a*

$$m(m + 1) - 8 \qquad [\text{ou} \quad c(c + 1) - 8],$$

sections coniques qui ont en ce point avec la courbe un contact du troisième ordre et qui la touchent en un autre point quelconque.

Ainsi, en particulier, on voit qu'en tout point d'une cubique il existe quatre coniques qui ont en ce point un contact du troisième ordre avec la cubique et qui la touchent en un autre point quelconque.

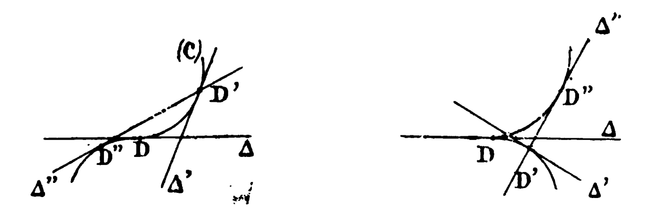
IX

Nous allons montrer maintenant quelles sont les particularités que présente la courbe (Γ), transformée d'une courbe (C), quand celle-ci possède un point d'inflexion, un point double ordinaire, un point de rebroussement, une tangente double ou plus généralement un point multiple d'ordre n et une tangente d'ordre τ, c'est-à-dire touchant (C) en τ points.

1°) A un point d'inflexion (ou de rebroussement) de la courbe (C) correspond une conique (D) circonscrite au triangle ABC et ayant avec (Γ), la transformée de (C), un contact du second ordre.

Considérons un point D′ infiniment voisin du point d'inflexion (ou de rebroussement) D. A ce point D′ correspond après transformation une conique (D′) circonscrite au triangle

ABC, qui touche la courbe (Γ) au point d' qui correspond dans la transformation à la tangente Δ' à (C) en D'. De plus, cette conique (D') rencontre (Γ) en un point d'', infiniment voisin de d', et qui correspond à la tangente Δ'' à (C) passant par ce point D'. Lorsque le point D' se rapproche indéfiniment de D, la conique (D') vient se confondre avec la conique (D) et le troisième point d'' commun à (D') et à (Γ) vient évidemment en d. Cette conique (D) a donc avec (Γ) un



contact du second ordre en ce point d, qui correspond à la tangente d'inflexion (ou de rebroussement).

Nous allons montrer comment de ce qui précède on peut déduire quelques théorèmes remarquables sur les courbes d'ordre $2c$ admettant trois points multiples d'ordre c. La proposition inverse de la précédente [c'est-à-dire que toute conique passant par les trois points multiples d'ordre c d'une courbe (Γ), d'ordre $2c$, et qui a, avec cette courbe, un contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe est due à un point d'inflexion (ou de rebroussement) de la courbe (C)] se démontrant avec la même facilité, nous en déduisons ce théorème :

Théorème. — *Pour toute courbe d'ordre* 2c *admettant trois-points multiples d'ordre* c, *le nombre des sections coniques pas sant par ces trois points multiples et ayant avec cette courbe un contact du second ordre en un point quelconque est*

$$3c(c-2).$$

En effet, toute courbe d'ordre m et de classe c a, quand elle ne possède aucun point de rebroussement, un nombre de points d'inflexion égal au plus à $3m(m-2)$. Comme, seule, la classe de la courbe (C) nous intéresse pour l'ordre de (Γ),

nous déduisons de ce que nous venons de dire que toute courbe de classe c, a, quand elle ne possède aucun point d'inflexion, un nombre de points de rebroussement égal au plus à $3c(c - 2)$. Comme à tout point de rebroussement de (C) correspond une conique (D) ayant avec (Γ) un contact du second ordre en un point de cette courbe, le théorème est démontré.

Considérons quelques cas particuliers. La courbe (C) touche le côté BC.

(a) *Pour toute courbe d'ordre* $2c$ *admettant deux points d'ordre* $c - 1$ *et un point d'ordre* c, *le nombre des sections coniques passant par ces trois points et ayant avec la courbe un contact du second ordre en un point quelconque est* $3c(c - 2)$.

Nous déduisons les deux suivants, en supposant que notre courbe (C) touche deux ou trois des côtés du triangle ABC, chacun en un seul point.

(b) *Pour toute courbe d'ordre* $2c$ *admettant deux points d'ordre* c *et un point d'ordre* $c - 1$, *le nombre des sections coniques passant par ces trois points et ayant un contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe est* $3(c + 1)(c - 1)$.

La courbe (Γ) est, en effet, dans le cas où (C) touche les deux côtés AB, AC d'ordre $2c - 2$; les deux points B, C d'ordre $c - 1$; A, d'ordre $c - 2$. Le nombre des coniques est toujours $3c(c - 2)$. Il suffit pour passer au théorème (*b*) de remplacer, dans ce qui précède, c par $c + 1$.

(c) *Pour toute courbe d'ordre* $2c - 1$, *admettant trois points multiples d'ordre* $c - 1$ *(et n'en admettant aucun autre comme dans les théorèmes précédents), le nombre des sections coniques passant par ces trois points et ayant un contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe est* $3c(c - 2)$.

2° A un point double D de la courbe (C), correspond pour Γ) une conique (D) circonscrite au triangle ABC et qui a un double contact avec cette courbe. Les points de contact de cette conique (D) avec (Γ) étant précisément les deux points qui correspondent, après la transformation, aux deux droites

tangentes au point double de (C) en ce point, on voit de suite qu'à tout point D d'ordre n de (C) correspond une conique (D), qui touchera (Γ) aux n points qui correspondent aux n tangentes à (C) en ce point multiple.

La proposition inverse est aussi évidente. A toute conique (D), ayant un double contact (ou tangente en n points) avec une courbe (Γ) d'ordre $2c$ et passant par ses trois points multiples d'ordre c, correspond un point double (ou d'ordre n) de (C). On voit ainsi un moyen simple de déterminer le nombre des sections coniques qui passent par les trois points d'ordre c d'une courbe d'ordre $2c$ qui la touchent en deux autres points quelconques.

Considérons une courbe (C) d'ordre n, le nombre maximum de ses points doubles est $N = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ et sa classe est alors $c = 2(m-1)$. On en déduit de là *que le nombre des sections coniques passant par les trois points d'ordre* c *d'une courbe d'ordre* 2c *et qui la touchent en deux autres points est* $\frac{1}{8}c(c-2)$.

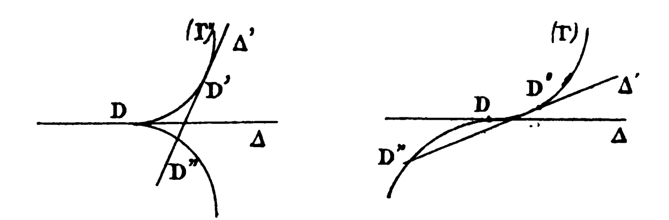
X

Donnons-nous une courbe (Γ) et cherchons la courbe (C) qui a pour transformée (Γ). Nous allons montrer qu'à toute tangente d'inflexion (ou de rebroussement) de la courbe (Γ), correspond dans (C) une conique (c) inscrite dans le triangle ABC et ayant avec (C) un contact du second ordre.

1° Considérons une tangente Δ′, infiniment voisine d'une tangente d'inflexion (ou de rebroussement) Δ′; cette droite est la transformée d'une conique (c') qui touche la courbe (C), au point où la droite D′ qui donne, après la transformation, le point D′, touche la courbe (C). Cette conique (c') a avec la courbe (C) une autre tangente D″ commune, infiniment voisine du point où ces courbes se touchent. Cette tangente donne après la transformation le point D″ commun à (Γ) et à Δ′. En passant à la limite où la droite Δ′ se confond avec Δ, on voit que la conique (c') vient se confondre avec la conique

(*c*), les points D′, D″ venant en D; cette conique (*c*) a, comme on le voit, un contact du second ordre avec (C).

Inversement, toute conique inscrite dans le triangle ABC et qui a un contact du second ordre avec la courbe (C) donne



pour sa transformée (Γ) une tangente d'inflexion (ou de rebroussement).

Le nombre des points d'inflexion d'une courbe (Γ) d'ordre $2c$ admettant trois points multiples d'ordre c et n'ayant aucun autre point de rebroussement est au plus égal à :

$$N = 3(2c)(2c - 2) - 9c(c - 1) = 3c(c - 1).$$

De là nous déduisons ce théorème:

Théorème I. — *Pour toute courbe de classe* c, *le nombre des sections coniques qui touchent trois droites données et qui ont un contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe est* $3c(c - 1)$.

Théorème corrélatif. — *Pour toute courbe d'ordre* m, *le nombre des sections coniques qui passent par trois points du plan et qui ont un contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe est* $3m(m - 1)$.

Si un, deux ou trois de ces points appartiennent à la courbe, on obtient les propositions suivantes:

(*a*) Par deux points d'un plan et par un point d'une courbe d'ordre m (de c) on peut mener $3m(m - 1) - 2$ sections coniques ayant avec la courbe un contact du second ordre en un point quelconque.

(*b*) Par un point du plan on peut mener $3m(m - 1) - 4$ sections coniques qui ont un contact du second ordre en un

point quelconque d'une courbe d'ordre m et qui la touchent en un autre point donné sur cette courbe.

(c) Par trois points pris sur une courbe d'ordre m on peut mener $3[m(m-1)-2]$ sections coniques ayant en un point quelconque de cette courbe un contact du second ordre.

En particulier, si les trois points de la courbe coïncident, on arrive à ce résultat.

En tout point d'une courbe d'ordre m il y a $3[m(m-1)-3]$ sections coniques ayant un contact du second ordre avec la courbe en ce point et qui ont un deuxième contact du second ordre en un point quelconque de cette courbe.

Application. $m = 3$. Nous voyons qu'il y a neuf coniques ayant un contact du second ordre en un point donné d'une cubique et qui ont de plus un autre contact du second ordre en un point quelconque de cette cubique.

2° Toute tangente double de (Γ) est la transformée d'une conique (c) inscrite dans le triangle ABC et doublement tangente à la courbe (C) d'ordre m et inversement.

Considérons une droite Δ touchant la courbe (Γ) en deux points d, d'. Cette droite Δ est la transformée d'une conique (c), inscrite dans ABC et qui touche la courbe (c) aux deux points où les tangentes D, D′, qui donnent après transformation les points d, d', touchent la courbe (C).

On voit un moyen simple d'avoir le nombre des coniques qui ont un double contact avec une courbe d'ordre m et qui touchent trois droites données : ce nombre représente celui des tangentes doubles d'une courbe d'ordre $2m(m-1)$ qui admet trois points multiples d'ordre $m(m-1)$.

De là on déduira aussi le nombre des coniques qui passent par trois points donnés et doublement tangentes à une courbe d'ordre m.

Nous ferons remarquer que si l'un des points vient sur la courbe, le nombre des sections coniques sera diminué de $2[m^2 + m - 4]$ (en vertu de la propriété démontrée plus haut [VIII — 3° (a)] si l'on ne compte pas les coniques bitangentes à la courbe, un de leurs points de contact étant le point donné de la courbe. Si un deuxième point vient sur la courbe,

ce nombre sera encore diminué de $2[m^2 - m - 6]$ [Voir (*b*)] et enfin si le troisième point est également sur la courbe, il sera diminué de $2[m^2 + m - 8]$ [Voir (*c*)]. En tout, de $6[m^2 + m - 6]$.

On démontrerait, aussi aisément, que toute tangente touchant (Γ) en τ points est la transformée d'une conique (*c*) inscrite dans ABC et ayant avec (C) un nombre de contacts égal à τ.

ESSAI HISTORIQUE

SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS

Par **M. Aubry.**

(*Suite*, voir page 245.)

Newton a fait faire un grand pas à la théorie et la résolution des équations. Ses travaux se trouvent consignés d'abord dans son *Arithmetica universalis*, publiée seulement en 1707, à Cambridge, mais qu'il avait écrite et fait connaître en 1669, dans les leçons qu'il professait au collège de Cambridge; ensuite dans son *Analysis per æquationes numero terminorum infinitas*, communiquée à Barrow à la même époque. Dans le premier de ces ouvrages, il entre dans beaucoup de détails sur la mise en équation des problèmes (*) et applique ses règles à un grand nombre de questions; puis, passant à la théorie des équations, il donne les expressions des puissances des racines en fonction des coefficients, et diverses méthodes pour rechercher les diviseurs rationnels des polynomes, quand ils en ont; trouver les limites des racines, [méthodes, dont l'une est restée classique (**)]; déterminer le nombre des racines

(*) Nous citerons cette règle : *Si deux quantités entrent de la même manière dans un problème, il y a avantage suivant les cas à prendre comme inconnue, ou la somme de ces deux quantités, ou leur différence, ou leur produit, etc.*

(**) Dans le cas où les racines sont toutes réelles, Newton donne plusieurs théorèmes, dont le plus simple peut s'énoncer ainsi : *Si* l *désigne la plus grande racine en valeur absolue, et* Σa^n *la somme des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *des racines, les termes de la suite* $\sqrt{\Sigma a^2}$, $\sqrt[4]{\Sigma a^4}$, $\sqrt[8]{\Sigma a^8}$, ... *tendent en décroissant constamment vers la limite* l.

réelles (*) ; et il termine par la construction géométrique des racines des équations du troisième degré (*Note* III). Dans le second ouvrage cité, il donne la méthode d'approximation connue (**) et sa règle du *parallélogramme analytique*, qu'il destinait au développement des fonctions en séries, mais qu'il applique ici à la recherche des racines des équations littérales.

La méthode d'approximation de Newton n'a été divulguée qu'en 1685, dans l'*Algebra* de Wallis. Elle a été retrouvée sous une autre forme par Raphson (*Analysis æquationum universalis*, Londres, 1690), qui donne, pour les dix premiers degrés, les développements de $F(a + g)$ (***), ce qui équivaut à la formule connue, pour chaque degré en particulier.

(*) *Pour que toutes les racines de l'équation* $x^m + Ax^{m-1} + \ldots = 0$, *soient toutes réelles, il faut qu'on ait :*

$$\frac{m-1}{2m}B^2 > A, \quad \frac{2}{3}\frac{m-2}{m-1}C^2 > BD, \quad \frac{3}{4}\frac{m-3}{m-2}D^2 > CE, \quad \ldots$$

Ce théorème a été démontré pour la première fois par Mac Laurin *Phil. Trans.*, 1726). Voici la démonstration, plus simple, qu'en a donnée Campbell (*Id.*, 1728).

Si toutes les racines sont réelles, il en en est de même des dérivées du premier membre, d'après le théorème de Rolle. Dérivons donc k fois, prenons l'équation aux inverses et dérivons encore $m - k - 2$ fois : on arrivera à une équation du second degré de la forme

$$(m - k + 1)Lx^2 + (m - k)Mx + N = 0,$$

qui, pour avoir ses racines réelles, doit présenter la relation indiquée

$$M^2 > \frac{m-k+1}{m-k}\frac{k+1}{k}LN.$$

Newton paraît avoir cru que le nombre de fois que ces inégalités n'ont pas lieu indique le nombre des racines imaginaires. Mac Laurin a rétabli le vrai sens du théorème.

(**) La méthode de Newton n'a que le principe de commun avec celle qui porte son nom. Il demande que la racine soit connue à 1/10 près et l'explique par son application à l'équation $y^3 - 2y - 5 = 0$. La racine ayant 2 pour valeur approchée, on pose $y = 2 + p$, d'où l'équation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Négligeant les termes en p^2 et p^3, il vient approximativement $10p - 1 = 0$, d'où $p = 0,1$. On pose ensuite $p = 0,1 + q$, ce qui donne $q^3 + 6,3.q^2 + 11,23.q + 0,061 = 0$, d'où en négligeant les termes en q^2 et q^3, $11,23.q + 0,061 = 0$, ce qui donne $q = -0,0054$. On posera de même $q = -0,0054 + r$, et ainsi de suite.

Il indique la marche de l'approximation et donne plusieurs conseils pour la pratique du calcul, mais ils sont peu utiles à connaître, à cause de l'attention qu'ils nécessiteraient.

(***) a désigne la valeur approchée de la racine et g ce qu'il faut y ajouter.

Rolle a donné en 1690 son *Traité d'algèbre*, où l'on voit, outre son fameux théorème, — qu'il employait à résoudre les équations en les abaissant successivement d'un degré, — la règle publiée plus tard par Newton pour la limite des racines, ainsi que celle qui fait intervenir le plus grand coefficient négatif et qui est souvent attribuée à Mac Laurin.

A cette époque, les merveilles du calcul infinitésimal, qui venait de naître, absorbaient tous les esprits ; aussi, l'analyse des quantités finies fut-elle un peu négligée dans la première moitié du XVII[e] siècle. Nous n'aurons à y signaler que des aperçus souvent ingénieux et qui porteront leurs fruits plus tard.

Leibniz a annoncé (*Lettre à Oldenbourg*, 1676) qu'il avait découvert dans chaque degré des équations résolubles à la manière des équations cubiques, la construction de tables destinées à faciliter la résolution des équations en général et un appareil destiné au même but. Leibniz n'a laissé aucune trace de ces découvertes ; ce qui reste de lui, sur ce sujet, est le développement en série de la formule de Tartaglia par la formule du binôme, — ce qui démontre la réalité des racines dans le cas irréductible, — *(Id.)*, et sa découverte des déterminants (*Lettre à l'Hospital*, 1693), découverte longtemps ignorée.

Tschirnhaus proposa, en 1683 *(Acta eruditorum Lipsiensæ)*, une méthode qu'il paraît tenir de Leibniz, et qui consiste à remplacer l'inconnue par un polynome d'un degré moindre, — ce qui paraissait devoir, par un choix judicieux des coefficients de ce dernier, réduire la transformée à n'avoir plus que deux termes. Cette méthode ne réussit pas en général, au delà du quatrième degré ; mais elle a fourni à Bring, Lagrange, Jerrard, Hamilton et Sylvester l'occasion de travaux remarquables.

Moivre *(Phil. Trans.*, 1707, et *Acta erud.*, 1709*)*, étudie les équations réciproques et assigne comme racines uniques des équations

$$ny + \frac{n^2 - 1}{2.3} ny^3 + \frac{n^2 - 1}{2.3}\,\frac{n^2 - 9}{4.5} ny^5 + \ldots = a$$

$$ny + \frac{1 - n^2}{2.3} ny^3 + \frac{1 - n^2}{2.3}\,\frac{9 - n^2}{4.5} ny^5 + \ldots = a$$

les expressions

$$y = \frac{1}{2}\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 + 1}} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{- a + \sqrt{a^2 + 1}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - 1}} \qquad \text{(Note V.)}$$

Reyneau (*Analyse démontrée*, Paris, 1708), donne la démonstration du théorème de Rolle par la considération du maximum, démonstration ordinairement attribuée à Ossian Bonnet.

De Lagny s'est beaucoup occupé de la théorie des équations, mais il n'y a guère à citer de lui que cette remarque, que la différence m^e d'un polynome du degré m est constante, et qu'on a ainsi un moyen facile de calculer les résultats des substitutions 1, 2, 3... à l'inconnue (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1712). Leibniz avait déjà remarqué cette propriété pour le monôme x^m. *(A suivre.)*

EXERCICES

Par M. **Barisien.**

(*Suite*, voir page 253.)

51. — *D'un point* M *du plan d'une parabole, on mène les deux tangentes* MT_1 *et* MT_2 *et on abaisse les trois normales à la parabole,* MN_1, MN_2 *et* MN_3.

Soient G *et* G_1 *les centres de gravité respectifs des triangles* MT_1T_2 *et* $N_1N_2N_3$ *et* O *le sommet de la parabole. Montrer que :*

1° Le lieu des points M *tels que* GG_1 *soit parallèle à* OM *se compose de l'axe de la parabole donnée et d'une autre parabole;*

2° Le lieu des points M *tels que* GG_1 *passe par un point fixe est une hyperbole;*

3° Lorsque le point fixe est au foyer, cette hyperbole se réduit à deux droites.

Soient : (α, β) les coordonnées du point M,
$(x_1y_1)(x_2y_2)$ celles des points T_1 et T_2,
$(X_1Y_1)(X_2Y_2)(X_3Y_3)$ celles des points N_1, N_2 et N_3.
Nous aurons pour les coordonnées des points G et G_1

$$3x_G = \alpha + x_1 + x_2, \qquad 3y_G = \beta + y_1 + y_2,$$
$$3x_{G_1} = X_1 + X_2 + X_3, \qquad 3y_{G_1} = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Or, d'après les formules qui précèdent l'exercice 10, on a

$$x_1 + x_2 = \frac{2(\beta^2 - p\alpha)}{p}, \qquad y_1 + y_2 = 2\beta,$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 2(\alpha - p), \qquad Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0.$$

On a donc

$$x_G = \frac{2\beta^2 - \alpha p}{3p} \qquad y_G = \beta,$$

$$x_{G_1} = \frac{2(\alpha - p)}{3}, \qquad y_{G_1} = 0.$$

L'équation de la droite GG_1 est par suite

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{2\beta^2 - \alpha p}{3p} & \beta & 1 \\ \frac{2(\alpha - p)}{3} & 10 & \end{vmatrix} = 0,$$

ou

(1) $$3p\beta x - (2\beta^2 - 3p\alpha + 2p^2)y - 2p\beta(\alpha - p) = 0.$$

1° L'équation de OM est

(2) $$\beta x - \alpha y = 0.$$

Si les droites (1) et (2) sont parallèles, on a

$$\frac{3p\beta}{2\beta^2 - 3p\alpha + 2p^2} = \frac{\beta}{\alpha},$$

ou bien

$$\beta(\beta^2 - 3p\alpha + p^2) = 0.$$

Le lieu des points M se compose alors de l'axe de la parabole et de la parabole représenté par l'équation

$$\beta^2 - 3p\alpha + p^2 = 0.$$

2° Si la droite (1) passe par le point fixe $(x_0 y_0)$, on a

(3) $$2\beta^2 y_0 + 2p\alpha\beta - 3py_0\alpha - p(3x_0 + 2p)\beta + 2p^2 y_0 = 0.$$

C'est une hyperbole.

3° Lorsque $x = \frac{p}{2}$ $y_0 = 0$, l'équation (3) devient

$$\beta\left(\alpha - \frac{7p}{4}\right) = 0,$$

et l'hyperbole se réduit à l'axe ox et à la droite correspondant à l'équation $\alpha = \frac{7p}{4}$.

Remarque. — Lorsque le point fixe est quelconque sur l'axe de la parabole, l'hyperbole (3) se compose encore de deux droites. En particulier, lorsque les coordonnées du point fixe sont

$$x_0 = -\frac{2p}{3}, \qquad y_0 = 0,$$

le lieu du point M se compose de l'axe de la parabole et de sa tangente au sommet.

52. — *D'un point* M *du plan d'une parabole* (P) *on mène les deux tangentes* MA *et* MB *à la courbe. Le cercle circonscrit au triangle* MAB *rencontre la parabole* (P) *en deux autres points* C *et* D*: le pôle de la corde* CD, *par rapport à la parabole, est un point* M′.

On considère le cercle (S) *passant par les pieds des normales abaissées de* M *sur* (P), *et le cercle* (S′) *passant par les pieds des normales abaissées de* M′ *sur* (P).

Montrer que, quelle que soit la position du point M *dans le plan :*

1° *La droite* MM′ *passe par le foyer de* (P);

2° *Les cercles* (S) *et* (S′) *ont même axe radical qu'un certain cercle fixe;*

3° *L'axe radical de ces deux cercles et la droite* MM′ *se rencontrent sur une ellipse fixe;*

4° *La ligne des centres des cercles* (S) *et* (S′) *passe par un point fixe.*

Si α et β désignent les coordonnées du point M, l'équation générale d'un cercle passant par A et B est de la forme

(1) $$\lambda(y^2 - 2px) + (px - \beta y + p\alpha)(px + \beta y + k) = 0$$

avec la condition

$$\lambda = p^2 + \beta^2.$$

Si on exprime que l'équation (1) est satisfaite par les coordonnées du point M, on trouve, après avoir supprimé le facteur $(\beta^2 - 2p\alpha)$,

$$k = p(p - \alpha).$$

De telle sorte que les équations des cordes AB et CD sont respectivement

(2) $$px - \beta y + p\alpha = 0,$$

(3) $$px + \beta y + p(p - \alpha) = 0.$$

Si α' et β' sont les coordonnées du point M′, la polaire de ce poin par rapport à la parabole a pour équation

(4) $$px - \beta' y + p\alpha' = 0.$$

En identifiant (3) et (4), on a

(5) $$\alpha' = p - \alpha \qquad \beta' = -\beta.$$

1°. L'équation de la droite MM′ est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ p-\alpha & -\beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ou
$$2\beta x + (p - 2\alpha)y - p\beta = 0.$$

Cette droite passe, quel que soit M, par le point dont les coordonnées sont $x = \frac{p}{2}$ $y = 0$, c'est-à-dire par le foyer.

2°. On sait que l'équation du cercle (S) est

(6) $$x^2 + y^2 - (\alpha + p)x - \frac{\beta}{2}y = 0.$$

Celle du cercle (S′) est de même

(7) $$x^2 + y^2 - (2p - \alpha)x + \frac{\beta}{2}y = 0.$$

Si on ajoute les deux équations (6) et (7), il vient

(8) $$2(x^2 + y^2) - 3px = 0.$$

Par conséquent, le cercle fixe (8) et les cercles (6) et (7) ont même axe radical.

3°. L'équation de cet axe radical commun s'obtient, en retranchant les

équations (6) et (7) l'une de l'autre, ce qui donne

(9) $$(p - 2\alpha)x - \beta y = 0,$$

ou

(10) $$y = \left(\frac{p - 2\alpha}{\beta}\right) x.$$

L'équation de MM′ peut s'écrire

(11) $$2x - p + \left(\frac{p - 2\alpha}{\beta}\right) y = 0.$$

De sorte qu'en éliminant $\left(\frac{p - 2\alpha}{\beta}\right)$ entre (10) et (11), on a

$$\frac{y}{2x - p} = \frac{-x}{y},$$

ou

(12) $$2x^2 + y^2 - px = 0.$$

La droite MM′ et l'axe radical des cercles (S) et (S′) se rencontrent donc sur l'ellipse fixe dont l'équation est (12).

4°. La ligne des centres des cercles (S) et (S′) a pour équation

$$y - \frac{\beta}{4} = - \frac{\beta}{p - 2\alpha}\left[x - \frac{(\alpha + p)}{2}\right]$$

ou

(13) $$y\left(\frac{p - 2\alpha}{\beta}\right) + x - \frac{3p}{4} = 0.$$

Cette droite passe par le point fixe dont les coordonnées sont

$$x = \frac{3p}{4}, \quad y = 0.$$

Remarques. — 1° Puisque l'axe radical de (S) et (S′) passe par le sommet de la parabole, et que la ligne des centres de ces deux cercles passe aussi par un point fixe, il en résulte que *le point d'intersection de l'axe radical et de la ligne des centres est sur un cercle fixe dont l'équation est*

$$4(x^2 + y^2) - 3px = 0.$$

2° *Les droites* AB *et* CD *se rencontrent sur la directrice de la parabole donnée.* — En effet, les équations (2) et (3) donnent, en les ajoutant l'une à l'autre,

$$2x + p = 0,$$

ce qui est l'équation de la directrice.

QUESTION 379

Solution par M. E.-N. Barisien.

On donne une conique (C) *et un point* A. *Trouver les coordonnées de l'orthocentre* H *du triangle formé par la polaire de* A *et par les tangentes à* (C), *issues de* A.

Réciproquement, H *étant connu, déterminer* A. (Kœnigs.)

1° *Cas d'une conique* (C) *à centre.* — Supposons que la conique (C) soit l'ellipse ayant pour équation

(1) $$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

La polaire du point A(α, β) a pour équation

(2) $$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0.$$

En formant les équations des trois hauteurs du triangle de l'énoncé, on parviendrait aux coordonnées de l'orthocentre H. Mais le calcul, ainsi conduit, est fort long. — Voici un procédé plus rapide. — On sait que si C est le cercle circonscrit à un triangle, G son centre de gravité, et H son orthocentre, les trois points C, G et H sont en ligne droite. On a aussi

$$GH = 2GC.$$

On a donc pour les abscisses de ces trois points dans le triangle qui nous intéresse

$$x_G - x_H = 2(x_C - x_G),$$

ou

(3) $$x_H = 3x_G - 2x_C.$$

On a de même, pour les ordonnées,

(4) $$y_H = 3y_G - 2y_C.$$

Nous sommes donc ramenés au calcul des coordonnées des deux points G et C.

Calcul des coordonnées du centre G. — Soient (x_1, y_1) (x_2, y_2) les coordonnées des points de rencontre de l'ellipse (1) avec la polaire (2). En éliminant y entre (1) et (2), on trouve l'équation du second degré en x,

$$x^2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2) - 2a^2b^2\alpha x + a^4(b^2 - \beta^2) = 0.$$

D'où $$x_1 + x_2 = \frac{2a^2b^2\alpha}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Par conséquent, $3x_G = \alpha + x_1 + x_2$,

ou

(5) $$3x_G = \alpha + \frac{2a^2b^2\alpha}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

On trouverait de même

(5)' $$3y_G = \beta + \frac{2a^2b^2\beta}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Calcul des coordonnées du centre C. — L'équation du cercle circonscrit au triangle formé par la polaire (2) et les tangentes issues de A est de la forme

(6) $$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)(b^2\alpha x-a^2\beta y+k)=0.$$

avec la condition

(7) $$\lambda b^2 + b^4\alpha^2 = \lambda a^2 - a^4\beta^2.$$

Exprimons en outre qué l'équation (6) est satisfaite pour $x = \alpha$, $y = \beta$, on trouve

(8) $$\lambda + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 + k = 0,$$

après avoir supprimé le facteur $(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2 - a^2b^2)$ qui est différent de zéro.

De (7) et (8) on déduit

$$\lambda = \frac{b^4\alpha^2 + a^4\beta^2}{c^2},$$

$$k = -\frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{c^2}.$$

L'équation (6) devient alors

(9) $$\left\{ \begin{array}{l} (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)(x^2 + y^2) - b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)x \\ \qquad - a^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)y - c^2(a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) = 0. \end{array} \right.$$

Les coordonnées du centre C de ce cercle sont donc

(10) $$x_c = \frac{b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}, \qquad y_c = \frac{a^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}.$$

Par suite, les coordonnées du point H sont, d'après (3) et (4), dans lesquelles on porte les valeurs (5) et (10) :

(11) $$x_H = \frac{b^2(a^2 + b^2)\alpha + c^2\alpha\beta^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2},$$

(11)' $$y_H = \frac{a^2(a^2 + b^2)\beta - c^2\alpha^2\beta}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Telles sont les coordonnées de H en fonction de celles de A.

Si réciproquement, on donne les coordonnées de H, et si l'on veut en déduire les valeurs de α et β, observons que de (11) et de (11)' on déduit les deux relations

(12) $$\alpha x_H + \beta y_H = a^2 + b^2,$$

(13) $$a^2\beta x_H - b^2\alpha y_H = c^2\alpha\beta.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à α et β, on trouverait deux valeurs pour les coordonnées du point A.

Il est intéressant de remarquer que la droite (12), en considérant α et β comme les coordonnées variables, est la polaire du point H par rapport au cercle de Monge de la conique (1).

L'équation (13) représente l'hyperbole d'Apollonius relative aux pieds des normales à la conique issues de H.

C'est donc à l'intersection de la droite (12) et de l'hyperbole (13) que se trouvent les deux points A′ et A″ correspondant à l'orthocentre H.

2° *Cas où la conique* (C) *est une parabole.* — Soit l'équation de la parabole

$$y^2 = 2px.$$

Le calcul est en tout point semblable à celui de la conique à centre. On trouve alors

$$3x_G = \frac{2\beta^2 - p\alpha}{p}, \qquad y_G = \beta,$$

$$x_C = \frac{2\beta^2 + p^2}{2p}, \qquad y_C = -\frac{\beta(2\alpha - p)}{2p}.$$

Pour les formules (3) et (4), on conclut les coordonnées de H.

$$(14) \qquad x_H = -(\alpha + p),$$

$$(15) \qquad y_H = \frac{2\beta(\alpha + p)}{p}.$$

Réciproquement, si on donne x_H et y_H, on déduit les coordonnées α et β

$$(16) \qquad \alpha = -(x_H + p),$$

$$(17) \qquad \beta = -\frac{py_H}{2x_H}.$$

Il n'existe alors qu'un point A relatif à un point H donné.

On voit, en effet, que l'hyperbole d'Apollonius relative au point H a pour équation

$$(18) \qquad \alpha\beta - \beta(x_H - p) - py_H = 0,$$

qui est vérifiée par les valeurs (16) et (17). Le point A est donc à l'intersection de la droite (16) et de l'hyperbole (18). Cette droite (16) étant parallèle à l'une des asymptotes de l'hyperbole (18), ne la rencontre bien qu'en un seul point à distance finie.

On remarque enfin que, comme dans le cas de la conique à centre, la droite (16) est la polaire du point H par rapport à la directrice de la parabole. Or, la directrice joue dans la parabole le même rôle que le cercle de Monge dans la conique à centre.

Nota. — M. W.-J. Greenstreet nous a adressé une solution de cette question.

QUESTION 378

Solution par M. E.-N. Barisien.

Par un point donné O, *d'une circonférence donnée* C, *on mène la sécante qui la coupe en* D. *Sur la droite* DO, *on prend les longueurs* DA *et* DB *égales au diamètre de* C, *de sorte que* $\overline{DA} = \overline{DB} = 2\overline{OC}$. *Sur la même droite, on prend* $\overline{OB'} = \overline{OB}$. *On trace la perpendiculaire* OL *à* AB, *jusqu'à sa rencontre avec* C, *en* L. *Par le point* B', *on mène la droite parallèle à* AL ; *et, par le point* A, *la droite perpendiculaire à* AL. *Démontrer que le point* M *d'intersection de ces droites est situé sur une épicycloïde à deux rebroussements.* (Svéchnicoff.)

Projetons le point M sur OA en I et soient R, le rayon du cercle C, et α l'angle $\widehat{AOC}$.

On a

$$(1) \begin{cases} OA = 2R + OD \\ = 2R(1 + \cos\alpha) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} OB' = OB \\ = 2R - OD \\ = 2R(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} AB' = OA - OB' \\ = 4R\cos\alpha. \end{cases}$$

Le triangle ALB est rectangle en L, puisque DL = DA = DB. Donc, l'angle $\widehat{OAL} = \frac{\alpha}{2}$.

On a, par suite,

$$(4) \qquad MB' = AB' \cos\frac{\alpha}{2} = 4R\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$(5) \qquad B'I = MB' \cos\frac{\alpha}{2} = 4R\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Prenons des axes rectangulaires, l'axe des x etant OC ; puis, cherchons les coordonnées du point M en fonction de

l'angle α. Pour y arriver commodément, cherchons d'abord les coordonnées x' et y' de M par rapport aux axes OLx' et OAy'. On a

$$x' = -\text{MI} = -\text{MB}' \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$y' = \text{OB}' + \text{B'I} = 2\text{R}(1 - \cos\alpha) + \text{MB}' \cos\frac{\alpha}{2},$$

et, en remplaçant MB' par sa valeur (4),

$$(6)\qquad x' = -\text{R} \sin 2\alpha$$

$$(7)\qquad y' = 2\text{R}(1 + \cos^2\alpha).$$

On passe des coordonnées (x', y') a celles (x, y) du point M par les formules connues:

$$x = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$
$$y = y' \sin\alpha - x' \cos\alpha.$$

En y portant la valeur (6) et (7), on trouve

$$x = 4\text{R}\cos^3\alpha$$
$$y = 2\text{R}(3\sin\alpha - 2\sin^3\alpha).$$

Ces valeurs peuvent s'écrire

$$(8)\qquad x = 3\text{R}\cos\alpha + \text{R}\cos 3\alpha,$$

$$(9)\qquad y = 3\text{R}\sin\alpha + \text{R}\sin 3\alpha.$$

On reconnaît là l'équation d'une épicycloïde à deux rebroussements.

Elle est engendrée par le roulement d'un cercle de rayon R à l'extérieur d'un cercle de rayon 2R, dont le centre est en O.

Les deux points de rebroussement de l'épicycloïde sont sur l'axe des y.

QUESTIONS PROPOSÉES

413. — Dans toute cardioïde, la distance du point de rebroussement au sommet est égale à huit fois sa distance à la tangente double. Les droites joignant le point de rebroussement aux points de contact de la tangente double font entre elles un angle de 120°. — Le lieu des milieux des cordes vues du point de rebroussement sous un angle droit est un cercle.

(Cazamian.)

414. — Toutes les cubiques circulaires unicursales qui ont un axe de symétrie (strophoïde droite et trisectrice de Maclaurin entre autres) peuvent être engendrées de la façon sui-

vante : soient un cercle (C), un point O pris sur ce cercle, et la tangente Δ à l'extrémité du diamètre OS passant par O. Menons par O une sécante rencontrant Δ en I et le cercle (C) en R, et prenons le point M tel que

$$RM = \frac{RI}{n},$$

montrer que le point M décrit une cubique circulaire ayant OS pour axe de symétrie, O pour point double et S pour sommet, et établir les deux formules suivantes :

1° Le demi-angle α des tangentes au point double est déterminé par $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{n}$

2° La distance du point double à l'asymptote est égale à $\frac{OS}{n}$,

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Dans toute cubique circulaire unicursale à axe de symétrie, la distance du point double à l'asymptote réelle est égale à la fraction $\frac{1}{tg^2 \alpha}$ de la distance du point double au sommet, α désignant le demi-angle des tangentes au point double. *(Cazamian.)*

415. — On donne trois droites concourantes OA, OB, OC, sur lesquelles on prend trois points A, B, C. On considère les cubiques cuspidales tangentes, en ces points, aux droites OA, OB, OC.

1° Le lieu des points d'inflexion est une cubique unicursale.

2° L'enveloppe des tangentes d'inflexion est une conique circonscrite au triangle ABC. *(Cazamian.)*

416. — Si R', R'' sont les rayons de courbure aux extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse E, et R le rayon de courbure à l'extrémité d'un des diamètres conjugués égaux, on a $R'^{\frac{2}{3}} + R''^{\frac{2}{3}} = 2R^{\frac{2}{3}}$. *(G. Tzitzéica.)*

RECTIFICATION

Dans l'énoncé de la question 409, posée page 263, il faut lire :

Toute cubique qui est sa propre inverse en coordonnées normales trilinéaires *et qui passe par les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle de référence,* est telle, etc...

Le Directeur-gérant,
G. DE LONCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23652-12-94.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

TABLE ALPHABETIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23652-11-94.